

LS

z 802

2. Ex.

BERICHTE
AUS DEM
INSTITUT FÜR MEERESKUNDE
AN DER
CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT KIEL

NR. 87A

DOI 10.3289/IFM-BER-87A

GRUNDLAGEN UND ANWENDUNG EINES NUMERISCHEN
MODELLS DER GESCHICHTETEN OSTSEE
TEIL 1

VON

JÜRGEN KIELMANN



Präs. Ex.!

Kopien dieser Arbeit können bezogen werden von:
Institut für Meereskunde an der Universität Kiel
Abt. Theoretische Ozeanographie
23/Kiel
Düsternbrooker Weg 20

ISSN 0341-8561

Diese Arbeit wurde von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Kiel als Dissertation angenommen.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Grundlagen und Anwendung eines numerischen Modells auf die geschichtete bzw. ungeschichtete Ostsee mit realistischer Bodentopographie bei einer horizontalen Auflösung von 10×10 km und einer vertikalen von 4 und 10 Schichten. Im ersten Teil werden die physikalischen Approximationen sowie mathematischen Fragen der Sachgemässheit und Hyperbolizität verschiedener in der Ozeanographie verwendeter partieller Differentialgleichungssysteme diskutiert. Letzteres ist im Zusammenhang mit der Wahl von Randbedingungen an offenen Rändern, wie z.B. an den westlichen Durchlässen der Ostsee, von Bedeutung.

Im zweiten Teil werden die quasi-stationären Zustände von Wasserstand, Volumentransport und Strömung bei verschiedenen Windlagen für die ungeschichtete und geschichtete Ostsee betrachtet und verglichen. Die Struktur der Strömungen und Transporte wird entscheidend vom kombinierten Einfluß der Schichtung und Topographie geprägt. Weitere auffällige Erscheinungen sind der an Küsten und unterseeischen Schwellen auftretende, in Zellenstrukturen organisierte Auftrieb, und Strömungsmaxima in Bodennähe. Durch zeitlich variable Windanregung werden Wirbel in der gesamten Ostsee erzeugt, die man als topographische Wellen deuten kann. Die Wirbel haben Durchmesser von ca. 20 - 80 km und wandern in den einzelnen Becken gegen den Uhrzeigersinn entlang Tiefenlinien, wenn der Wind nachlässt.

Im dritten Teil werden 2-monatige Simulationsrechnungen für die homogene Ostsee im Zusammenhang mit dem Meßprogramm BAL TIC '75 präsentiert, die bei den Wasserständen zufriedenstellende, bei den mittleren Strömungen jedoch unbefriedigende Ergebnisse liefern.

BASIS AND APPLICATION OF A NUMERICAL MODEL OF THE STRATIFIED BALTIC SEA

Summary

The present paper deals with the basis and application of a numerical model to the homogeneous and stratified Baltic Sea with realistic bottom topography. The resolution is 10 x 10 km in the horizontal and 4 or 10 layers in the vertical.

In the first part, the physical approximations as well as the mathematical questions of well-posedness and hyperbolicity of systems of partial differential equations used in oceanography are discussed. This becomes important in connection with the choice of boundary conditions at open boundaries, e.g. at the western outlets of the Baltic.

In the second part, the quasi-steady state of sea level, volume transport and currents are considered and compared for the homogeneous and stratified Baltic at different wind situations: The structure of currents and transports are dominated by the combined effect of stratification and topography. Striking features are upwelling at the coast or near sills organized in cell-like structures, and current maxima close to the bottom. Variable winds in time generate eddy-like structures everywhere in the Baltic which are supposedly topographic waves. The eddies have diameters of 20 - 80 km and migrate cyclonically along the depth contours in different basins after the winds have ceased.

In the third part, 2-months long simulations for the homogeneous Baltic are presented in connection with the field program BALTIC'75. The computations show satisfactory results for the water levels but rather unsatisfactory results for the averaged currents.

Band 1

<u>§ 0 Einleitung</u>	5
<u>§ 1 Die mathematisch-physikalischen Grundlagen des Modells</u>	9
1.1. <u>Die physikalischen Grundlagen</u>	9
1.1.1 Die Ausgangsgleichungen	9
1.1.2 Approximationen	15
1.1.3 Randbedingungen und Vertikalintegration	21
1.1.4 Anfangsbedingungen	21
1.2. <u>Die mathematischen Grundlagen</u>	27
1.2.1 Definition der Klassifizierung von quasi- linearen Systemen 1. Ordnung	27
1.2.2 Typeneinteilung der kompressiblen, reibungs- und diffusionsfreien Gleichungen	30
1.2.3 Einordnung der inkompressiblen, reibungs- und diffusionsfreien Gleichungen	42
1.2.4 Einordnung der vertikalintegrierten Gleichungen	45
1.2.5 Das Anfangs-Randwertproblem für die vertikal- integrierten Gleichungen	49
1.2.6 Das Anfangs-Randwertproblem für die baro- klinen Gleichungen	56
1.3. <u>Die Diskretisierung in finiten Differenzen</u>	58
1.3.1 Diskretisierung in Schichten (vertikal)	59
1.3.2 Diskretisierung der horizontalen und zeitlichen Koordinaten	62

1.3.3	Stabilitätsschranken	65
1.3.4	Fehlerbetrachtungen	68
1.3.5	Die Abbildung der Ostsee auf eine Tangentialebene mit Modell-Topographie	72
1.3.6	Modell-Realisierung auf dem Rechner	73
1.4.	<u>Die im Modell verwendeten Anfangs- und Randbedingungen</u>	74
1.4.1	Das Initialisierungsproblem	74
1.4.2	Randbedingungen in der geschlossenen Ostsee	75
1.4.3	Das Problem des offenen Randes in den Belten	75
§ 2	<u>Modellrechnungen unter idealisierten Bedingungen</u>	82
2.1.	<u>Zirkulation in der ungeschichteten Ostsee</u>	83
2.1.1	Wahl der Bodenreibung und Diffusion	84
2.1.2	Wasserstand und Volumentransporte	87
2.1.2.1	Quasi-stationärer Zustand	87
2.1.2.2	Die nicht-rotierende Ostsee ($f=0$)	95
2.1.2.3	Offene Belte	97
2.1.3	Barotrope Strömungen in der geschlossenen und offenen Ostsee	98
2.2.	<u>Zirkulation in der geschichteten Ostsee</u>	102
2.2.1	Wahl der Reibung, Diffusion und Dichte	103
2.2.2	Wasserstand und Volumentransporte (baroklin)	106
2.2.3	Barokline Strömungen	109
2.2.4	Dichteanomalien und Auftriebserscheinungen	114

<u>2.3. Topographische Wellen - Wirbel in der Ostsee</u>	119
2.3.1 Allgemeines	119
2.3.2 Beobachtungen von Wirbeln in der Ostsee	123
2.3.3 Erzeugung von Wirbeln im linearen barotropen Modell	126
2.3.4 Erzeugung von Wirbeln im linearen baroklinen Modell	130
<u>§ 3. Simulationsrechnungen im Zusammenhang mit Meßprogramm BALTIC'75</u>	134
<u>3.1. Methoden der Modellverifizierung</u>	135
3.1.1 Vergleich von Einzelphänomenen	135
3.1.2 Statistische Vergleiche in Raum und Zeit	136
3.1.3 Statistische Vergleiche im Fourierraum	137
3.1.4 Typische Simulationsrechnungen	137
<u>3.2. Beobachtungsdaten des Experiments BALTIC'75</u>	140
3.2.1 Beobachtungsmaterial	140
3.2.2 Berechnung von vertikal gemittelten Strömungen	140
3.2.3 Untersuchung der meteorologischen Daten	142
<u>3.3. Simulationsrechnungen unter verschiedenen Bedingungen</u>	
3.3.1 <u>Referenzsimulation</u>	146
3.3.1.1 Visueller Vergleich im Zeitbereich	146
3.3.1.2 Spektraler Vergleich	149
3.3.1.3 Geschicklichkeitskoeffizienten, Korrelation	152
3.3.2 <u>Einfluss der Belte</u>	152
3.3.2.1 Geschlossene Ostsee	152
3.3.2.2 Offene Ostsee	152

3.3.3	<u>Einfluß verschiedener anderer Faktoren</u>	153
3.3.3.1	Reibung	153
3.3.3.2	Windeffekt versus Druckeffekt	154
3.3.3.3	Andere Effekte	155

§ 4	<u>Schlußbetrachtung</u>	156
-----	--------------------------	-----

Band 2

§ 5	<u>Anhang</u>	1
-----	---------------	---

A 1.1	(zu § 1.1)	1
A 1.2	(zu § 1.2)	7
A 1.3	(zu § 1.3)	15
A 2	Tabelle 1 und 2	23
A 3	Tabelle 3	25

§ 6	<u>Literatur</u>	26
-----	------------------	----

§ 7	<u>Abbildungen</u>	36
-----	--------------------	----

B 1.3	(zu § 1.3)	38
B 2.1	(zu § 2.1)	41
B 2.2	(zu § 2.2)	64
B 2.3	(zu § 2.3)	96
B 3.2	(zu § 3.2)	105
B 3.3	(zu § 3.3)	108

0 Einleitung

Die vorliegende Arbeit verwendet ein instationäres baroklines numerisches Modell (Simons (1973)), um Teilaspekte der Zirkulation der Ostsee zu studieren. Versteht man unter dem Begriff der Zirkulation die rektifizierte Wirkung aller möglichen Bewegungsprozesse im Meer, wobei die Rektifizierung als eine Mittelung über gewisse Raum- und Zeitskalen definiert wird, so ist das Zirkulationsproblem bezüglich klimatologischer Zeitskalen weder für das Weltmeer (Pond & Bryan (1976)), noch für Randmeere zufriedenstellend gelöst.

In der Ostsee sind Einzelprozesse wie z.B. Eigenschwingungen, interne Wellen, Trägheitswellen, Vermischung etc. intensiv studiert worden. Literatur findet man zum grossen Teil im Buch von Magaard & Rheinheimer (1974) oder auch in der Literaturstudie von Schweimer (1978). Welche Rolle die Einzelprozesse hinsichtlich ihrer Rektifizierung auf die Zirkulation in der Ostsee haben bzw. ob sie sich parametrisieren lassen, ist nicht immer bekannt. Es gibt z.B. Hinweise darauf, daß durch meteorologische Fronten erzeugte stark nicht-lineare Trägheitsschwankungen bei Vermischungsprozessen eine bedeutende Rolle spielen (Krauß (1978) und (1980)).

Eine Reihe von Arbeiten hat sich mit der Bestimmung der Strömungen in der Ostsee aus hydrographischen Daten beschäftigt: Soskin et al. (1963) berechnen Strömungen nach der dynamischen Methode, Kowalik & Taranowska (1974) berechnen die sommerliche thermohaline Zirkulation der eigentlichen Ostsee mit einem stationären analytischen Modell, Sarkisyan et al. (1975)

sowie Kowalik & Staśkiewicz (1976) verwenden ein stationäres numerisch-diagnostisches Modell mit realistischer Bodentopographie zur Berechnung der klimatologischen, sommerlichen Strömungen und Transporte in der eigentlichen Ostsee. Ein wichtiges Ergebnis ist die Bedeutung des kombinierten Einflusses von Bodentopographie und Schichtung.

Ein Versuch, die klimatischen Oberflächenströmungen der gesamten Ostsee aus 25-jährigen Feuerschiffsbeobachtungen zu konstruieren, findet man in Wessel (1971). Eine Karte seiner Oberflächenströmungen ist in Abb. (0.0-1) auf der hier verwendeten stereographischen Ostseekarte reproduziert. Sie steht im Widerspruch zu den von Kowalik & Staśkiewicz (1976) berechneten Oberflächenströmungen, die Ähnlichkeit mit der nach einer Südwestwindlage entstehenden Ekman-Strömung haben.

Die Bedeutung der durch die Salzwassereinbrüche in der westlichen Ostsee entstehenden Dichteänderungen und der daraus resultierenden Strömungen wurden von Welander (1974) und Wilmot (1974) behandelt.

Windgetriebene Modelle für die Ostsee oder Ostseegebiete zur Berechnung von Wasserstandsänderungen, barotropen Strömungen und Transporten wurden von Uusitalo (1960), Laska (1966), Kowalik (1969), Uusitalo (1971), Kowalik (1972), Svansson & Szaron (1974), Koop (1974) und Kielmann (1976) verwendet. Jankowski (1978) betrachtet sowohl winderzeugte als auch durch den Süßwasserzufluß bedingte barotrope Strömungen und Transporte.

Der starke Einfluß von Schichtung und Topographie sowie die Schwierigkeit, Punktmessungen von Strommesserketten im Bornholmbecken zu simulieren, wurde von Simons (1976, 1978) mit einem numerischen Modell demonstriert, das im Bornholmbecken hochauflösend und baroklin, ausserhalb des Beckens grobauflösend und barotrop ist. Die Arbeit enthält erste Hinweise auf die Existenz von topographischen Wellen in der Bornholmsee. Das spektrale Kanalmodell von Krauß (1979) zeigt ebenfalls starke, topographisch bedingte Effekte, die als am Boden konzentrierte Randwellen gedeutet werden.

Bei den vorliegenden Untersuchungen stehen weder die hochfrequenten Vorgänge wie Trägheitswellen, Randwellen etc., noch die oben erwähnte klimatologische Zirkulation der Ostsee im Mittelpunkt des Interesses. Vielmehr wird hier unter "Zirkulation" das Antwortverhalten der Ostsee bei niederfrequenter, räumlich konstanter Windanregung verstanden, wenn man von den im 3. Kapitel diskutierten Simulationsrechnungen absieht (§ 3). Letztere zeigen aber, daß Simulationsrechnungen unter den gegebenen Verhältnissen nur im niederfrequenten Bereich erfolgreich sein können. Die räumliche Konstanz des Windfeldes ist dadurch gerechtfertigt, daß die Tiefdruckgebiete eine den Ostseeabmessungen vergleichbare Skala besitzen.

Für solche idealisierten Windlagen von ein paar Tagen Dauer mit optimaler Unterdrückung der barotropen Seiches werden die quasi-stationären Felder (Wasserstand, Transporte, Strömungen, Dichteanomalien) mit einem baroklinen Mehrschichtenmodell (4 und 10 Schichten) bei einer hori-

zontalen Auflösung von 10x10 km berechnet (§ 2.1, § 2.2). Desgleichen werden topographische Wellen mit einem niederfrequenten Wind erzeugt (§ 2.3). Da aus Satellitenphotos horizontale Wirbelstrukturen mit einer Skala bis hinunter zu 10km bekannt sind (Kielmann (1978)), müssen diese Prozesse auf Grund der verwendeten Auflösung nicht wie bei vielen der obengenannten Modelle parametrisiert werden. Es ergeben sich daher Einzelheiten in den hydrodynamischen Bewegungsfeldern der Ostsee, die in den bisherigen Modellen nicht auflösbar waren.

Um Adjustierungsprobleme zu vermeiden, werden die Rechnungen vom Zustand der Ruhe aus mit einer nur vertikalen Schichtung gestartet. Mathematisch gesehen, handelt es sich bei den Modellrechnungen um die Lösung einer komplizierten Anfangs-Randwertaufgabe, die wegen der westlichen Durchlässe der Ostsee auch noch offene Ränder enthält.

Da die Sachgemäßheit solcher Probleme von Interesse ist, wird im ersten Teil (§ 1.2) unter anderem die Hyperbolicität der in der Ozeanographie verwendeten Grundgleichungen, die Anzahl der benötigten Randbedingungen etc. von einem allgemeineren Standpunkt her untersucht. Grundlegende Arbeiten hierzu findet man in § 1.2, 1.2.1, 1.2.2 zitiert.

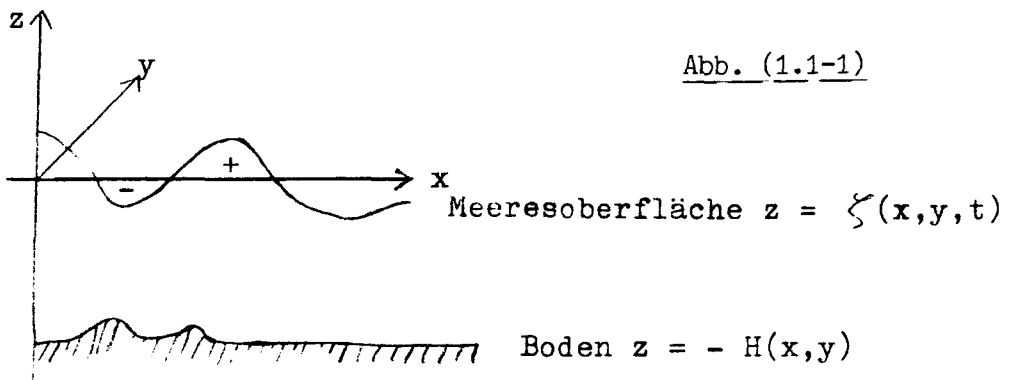
Details der numerischen Approximation sind niedergelegt in § 1.3. Die Beschreibung der Physik und einiger Approximationen werden in § 1.1 und § 1.4 aufgeführt.

Aus Gründen des Umfangs und wegen einer besseren Übersicht sind die zu den Modellrechnungen gehörigen Abbildungen und der Anhang in einem zweiten Band zusammengefasst.

1. Die mathematisch-physikalischen Grundlagen des Modells

1.1 Die physikalischen Grundlagen

Im folgenden werden die dem Modell zu Grunde gelegten Gleichungen, Randbedingungen und Approximationen, soweit sie die Physik betreffen, dargestellt und diskutiert. Die Grundlagen bilden die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und innerer Energie. Koordinatenabhängige Gleichungen werden in einem kartesischen Rechtssystem x, y, z mit x nach Osten, y nach Norden und z nach oben formuliert.



Die Bezeichnungen für Strömung, Dichte, Druck, Temperatur, Salz, Winkelgeschwindigkeit der Erde, Schwerepotential, Meeresoberfläche und Boden sind dabei nach einander:

$u, \rho, p, T, S, \Omega, \phi, \zeta, H$.

1.1.1 Die Ausgangsgleichungen

Um die turbulenten bzw. kleinskaligen Bewegungen eines hydrodynamischen Systems von den "mittleren" zu trennen, werden die Größen Impuls, Dichte, Druck, Temperatur und Salz in mittleren und fluktuierenden Anteil aufgespalten. Die Erhaltungssätze für Impuls, Masse, Wärme und Salz des gemittelten Systems lauten dann unter Verwendung der

Reynoldsbedingungen und der Tatsache, daß die Dichtefluktuations im Meer sowie die molekulare Diffusion im Verhältnis zur turbulenten äußerst klein sind (z.B. Krauß, (1973), S.233):

(1.1.1-1)

$$a) (\rho u)_t + \nabla \cdot (\rho \underline{u} \underline{u}) + 2 \underline{\Omega} \times \rho \underline{u} + \nabla p + \rho \nabla \phi + \nabla \cdot (\rho \overline{\underline{u}' \underline{u}'}) = 0$$

$$b) \rho_t + \nabla \cdot \rho \underline{u} = 0$$

$$c) (\rho c_p T)_t + \nabla \cdot (\rho c_p T \underline{u}) + \nabla \cdot (\rho c_p \overline{T' \underline{u}'}) = 0$$

$$d) (\rho S)_t + \nabla \cdot (\rho \underline{u} S) + \nabla \cdot (\rho \overline{S' \underline{u}'}) = 0$$

Außerdem gilt die Zustandsgleichung

$$(1.1.1-2) \quad \rho = \rho(p, T, S)$$

Die gestrichenen Größen sind die Fluktuationen, der Querstrich bezeichnet ihre Korrelationen.

Die gemittelte Kontinuitätsgleichung (b) gilt exakt, wenn statt der Geschwindigkeit der Impuls der Flüssigkeitsvolumina in mittleren und fluktuierenden Anteil aufgespalten wird (s. Anhang A1.1-1). Dies führt zu einer etwas anderen Definition der "mittleren" Geschwindigkeit.

Die Fluktuationen stellen bei Anwendung von numerischen Modellen zur Lösung von (1.1.1-1) nicht nur die turbulenten, sondern vielmehr diejenigen Prozesse dar, die durch die Diskretisationstechnik im numerischen Gitter nicht aufgelöst werden können. Die zur Schließung der Gleichungen

benötigten Terme $\overline{u'u'}$, $\overline{T'u'}$, $\overline{S'u'}$ hängen von der Gitterweite des Modells ab, wobei die Gitterweite in vielen Fällen mehr durch die Rechnerkapazität bestimmt wird als durch physikalische Prinzipien.

Auf das schwierige Problem der Schließung, für das es verschieden aufwendige Lösungsmethoden gibt, soll hier nicht detailliert eingegangen werden.

Die Korrelationen werden durch "turbulente" Austauschkoefizienten mit dem mittleren Feld verknüpft. Ob eine solche Parametrisierung der "Gitterdiffusion" immer sinnvoll ist, muß bezweifelt werden. So lassen die Untersuchungen von Harrison (1978) darauf schließen, daß z.B. die Parametrisierung von mesoskaligen Wirbeln im Atlantik (~ 100 km) über ein Austauschkonzept nicht zu rechtfertigen ist.

Satellitenaufnahmen der Ostsee zeigen die Existenz von Wirbeln mit einer horizontalen Skala bis hinunter zu 10 - 20 km, so daß eine Modellauflösung von mindestens der gleichen Ordnung anzustreben ist, um damit eine Parametrisierung der Wirbel zu vermeiden.

Der Stresstensor $R_{ij} = - \rho \overline{u_i' u_j'}$ wird in der Literatur auf verschiedene Art mit dem Deformationstensor des mittleren Feldes in Verbindung gebracht. Sehr verbreitet ist die Methode, unter Verstümmelung des Deformationstensors jedes einzelne Element R_{ij} darzustellen als

$$(1.1.1-3) \quad R_{ij} = - \rho \overline{A^{(j)} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$$

mit $A^M(j) = A_h^M$ für $j = 1, 2$ und $A^M(3) = A_v^M$ als horizontalen und vertikalen Austauschkoeffizienten (siehe z.B. Krauß 1973, S.241).

Diese Darstellung enthält den Widerspruch, daß wegen der starken Anisotropie $A_v^M \ll A_h^M$ und der Verstümmelung des Scherungsfeldes die Symmetrie von R_{ij} verletzt wird. (1.1.1-3) kann daher nur als grobe Approximation dienen.

Definiert man andererseits (siehe z.B. Kamenkovich (1977), S.117)

$$(1.1.1-4) \quad R_{ij} = -\frac{1}{3} \varrho_0 \overline{u'_v u'_v} \delta_{ij} + \varrho_0 K_{ijklm} D_{lm},$$

wobei K_{ijklm} ein um die Vertikale achsensymmetrischer Tensor 4. Ordnung und D_{lm} der Deformationstensor ist, so erhält man einen symmetrischen Stresstensor, dessen Spur die kinetische Energie der Fluktuationen ist. Er hängt jedoch von 3 Austauschkoeffizienten A_h^M , A_v^M , A^M ab und führt auf eine von den herkömmlichen Reibungstermen verschiedene Form in den Bewegungsgleichungen, die nur unter Vernachlässigungen in die Form (1.1.1-3) überführt werden kann.

Das Problem der widerspruchsfreien Formulierung des Stress- bzw. Spannungstensors ist für die dynamische Grenzflächenbedingung, besonders bei beweglichen oder offenen Rändern, von Bedeutung. Die Approximation der R_{ij} muß in jedem Einzelfall geprüft werden. Im Modell wird (1.1.1-3) verwendet.

Die übrigen Korrelationen $\overline{\varrho \mathbf{u}' \mathbf{T}'}$ etc. werden ebenfalls über das Austauschkonzept formuliert, so daß man unter Benutzung der Kontinuitätsgleichung und (1.1.1-3) die folgenden parametrisierten Gleichungen erhält:

(1.1.1-5)

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + 2\Omega \times \mathbf{u} + \frac{1}{\varrho} \nabla p + \nabla \phi = \\ = \nabla_h \cdot (A_h^M \nabla_h \mathbf{u}) + (A_v^M \frac{d\mathbf{u}}{dz})_z \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{d\varrho}{dt} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}) = 0$$

$$\text{c) } \frac{dT}{dt} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla_h \cdot (A_h^T \nabla_h T) + (A_v^T \frac{dT}{dz})_z$$

$$\text{d) } \frac{dS}{dt} + \mathbf{u} \cdot \nabla S = \nabla_h \cdot (A_h^S \nabla_h S) + (A_v^S \frac{dS}{dz})_z .$$

$A_h^M, A_h^T, S_h^T ; A_v^M, A_v^T, A_v^S$ sind die horizontalen bzw. vertikalen Austauschkoeffizienten für Impuls, Wärme und Salz. Sie haben hier die Dimension $[A] = [\text{cm}^2/\text{s}]$.

Ist das Medium nahezu inkompressibel, so gilt statt (1.1.1-2) $\varrho = \varrho(T, S)$ und man erhält bei Vernachlässigung der molekularen Diffusion die Gleichung $d\varrho/dt = 0$. Das ergibt mit derselben Mittelungsmethode wie oben (siehe auch Anhang A1.1-1) die Gleichung

$$(1.1.1-6) \quad \frac{d\varrho}{dt} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varrho = - \overline{\mathbf{u}' \cdot \nabla \varrho'}$$

Ersetzt man die rechte Seite wieder durch ein Austauschkonzept, so erhält man

$$(1.1.1-7) \quad \rho_t + \underline{u} \cdot \nabla \rho = \nabla_h (K_h \nabla_h \rho) + (K_v \rho_z)_z ,$$

wobei K_h und K_v jeweils die horizontalen und vertikalen Austauschkoeffizienten für den Auftrieb sind.

Aus den Gleichungen (1.1.1-5), (a) bis (d), oder (a) - (b) und (1.1.1-7) werden die Modellgleichungen approximiert.

Nimmt man an, daß in erster Näherung

$$(1.1.1-8) \quad \rho \approx \rho_0 - \alpha_T (T - T_0) + \alpha_S (S - S_0) ,$$

d.h. die Dichte eine lineare Funktion von T und S ist, so kann man durch Multiplikation von (1.1.1-5c) mit

$\frac{\partial \rho}{\partial T}$ und (1.1.1-5d) mit $\frac{\partial \rho}{\partial S}$ sowie Addition der Gleichungen ebenfalls die Gleichung (1.1.1-7) herleiten, wenn

$A_h^T \approx A_h^S \approx K_h$ bzw. $A_v^T \approx A_v^S \approx K_v$ gilt. Dies ist aber näherungsweise der Fall (Turner 1973).

1.1.2 Approximationen

Außer der Parametrisierung der Turbulenz bzw. Gitterdiffusion und der Ersetzung der Erhaltungsgleichungen für T und S durch eine Gleichung für ϱ unter der Voraussetzung der Inkompressibilität werden auf Grund einer Skalenanalyse noch weitere Vereinfachungen des Systems (1.1.1-5) bzw. (1.1.1-7) vorgenommen.

Seien L, H, f^{-1} , U charakteristische Länge, Tiefe, Zeit und Geschwindigkeit, so wird folgende Skalierung eingeführt:

(1.1.2-1)

$$\begin{aligned} x^* &= L_0 x & u^* &= U_0 u \\ y^* &= L_0 y & v^* &= U_0 v \\ z^* &= H_0 z & w^* &= U_0 \frac{H_0}{L_0} w \\ t^* &= f_0^{-1} t \end{aligned}$$

Außerdem werden folgende dimensionslose Zahlen definiert:

(1.1.2-2)

$$\zeta = \frac{H_0}{L_0}, \quad \xi = \frac{U_0}{f_0 L_0}, \quad F = \frac{f_0^2 L_0^2}{g H_0} = \left(\frac{L}{R} \right)^2, \quad \gamma = \frac{\Delta \varrho}{\varrho_0}$$

$$E_h = 2A_h^M / (f_0 L_0^2), \quad E_v = 2A_v^M / (f_0 H_0^2), \quad E_h' = 2K_h / (f_0 L_0^2), \quad E_v' = 2K_v / (f_0 H_0^2)$$

$$F_i = F / \gamma = (L/R_i)^2 = 1/B, \quad Re = \xi / E_h, \quad Re_v = \xi / E_v.$$

Dabei ist δ = Aspekt-Verhältnis, ξ = Rossby-Zahl, F = Froude-Zahl, R = Rossby-Deformationsradius, γ = Stabilität, E_h, E_v horizontale und vertikale Ekman-Zahlen; E'_h, E'_v analog für Massendiffusion, F_1 = interne Froude-Zahl. R_1 = Barokliner Rossby-Deformationsradius, Re = Reynolds-Zahl, Re_v für vertikale Reibung.

Im Anhang (A1.1-3) sind die Bereiche, in denen diese Zahlen in der Ostsee etwa lokal schwanken können sowie typische Werte für topographische Phänomene angegeben. Z.B. $\xi \approx 0(10^{-2})$, $F \approx 0(10^{-2})$, $\gamma \approx 0(10^{-2})$ etc. Für größere Skalen kann aber auch $\xi \approx 0(10^{-3})$, $F \approx 0(1)$ etc. sein.

Durch Skalierung der 3. Bewegungsgleichung und Entwicklung nach dem Parameter $\delta \approx 0(10^{-3})$ erhält man in guter Näherung die hydrostatische Approximation, so daß die Dichte ρ^* in der Form

$$(1.1.2-3) \quad \rho^* = \rho_0 (1 + \gamma \bar{\rho}(z^*) + \xi F \rho)$$

und der Druck in der Form

$$(1.1.2-4) \quad p^* = \rho_0 g H_0 p_0(z^*) + \rho_0 U_0 f_0 L_0 p$$

skaliert werden können (Greenspan, 1968).

Der letzte Term in der Dichte- bzw. der Druckskalierung entspricht der geostrophischen Balance.

Die 3 Bewegungsgleichungen, die Kontinuitätsgleichung und die Dichteerhaltungsgleichung lauten dann in skaliert Form

(1.1.2-5)

$$\begin{aligned} \text{a) } (1 + \gamma \bar{\rho}(z) + \epsilon F \rho) \left\{ u_t + \epsilon \underline{u} \cdot \nabla u - v f / f_0 \right\} + p_x &= \\ &= \rho^* \frac{1}{2} \left\{ E_h \Delta_h u + E_v u_{zz} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (1 + \gamma \bar{\rho}(z) + \epsilon F \rho) \left\{ v_t + \epsilon \underline{u} \cdot \nabla v + u f / f_0 \right\} + p_y &= \\ &= \rho^* \frac{1}{2} \left\{ E_h \Delta_h v + E_v v_{zz} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (1 + \gamma \bar{\rho}(z) + \epsilon F \rho) \delta^2 \epsilon F \left\{ w_t + \epsilon \underline{u} \cdot \nabla w - \frac{1}{2} [E_h \Delta_h w + E_v w_{zz}] \right\} &= \\ &= \left\{ p_{0z} + 1 \right\} + \left\{ \epsilon F p_z + \gamma \bar{\rho}(z) + \epsilon F \rho \right\} \end{aligned}$$

$$\text{d) } F(\rho_t + \epsilon \underline{u} \cdot \nabla \rho) + \gamma w \bar{\rho}_z + (1 + \gamma \bar{\rho}(z) + \epsilon F \rho) \nabla \cdot \underline{u} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{e) } F(\rho_t + \epsilon \underline{u} \cdot \nabla \rho) + \gamma w \bar{\rho}_z &= \\ \frac{1}{2} F \left\{ E'_h \Delta_h \rho + E'_v \rho_{zz} \right\} + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\epsilon} E'_v \bar{\rho}_{zz} \end{aligned}$$

Die Skalierung zeigt die bekannte Tatsache, daß die hydrostatische Approximation wegen $\delta \ll 1$ eine ausgezeichnete Näherung ist. Wegen $\gamma \ll 1$ sind die Dichteänderungen nur auf der rechten Seite von (1.1.2-5c) wichtig, weil sich

dort die jeweiligen Klammern balancieren, d.h. es gilt die Boussinesque Approximation. Insbesondere sind

in d) $\int w \bar{\varphi}_z, \int \bar{\varphi}(z), \varepsilon F \bar{\varphi} \ll 1$ und fallen daher gegen den Term $\nabla \cdot \underline{u}$ mit $O(\nabla \cdot \underline{u}) \approx O(1)$ weg. Solange $F \ll 1$ gilt, ist auch der Term $F(\varphi_t + \varepsilon \underline{u} \cdot \nabla \varphi)$ sehr klein gegen

$(1 + \dots) \nabla \cdot \underline{u}$, d.h. es gilt näherungsweise die vereinfachte Kontinuitätsgleichung $\nabla \cdot \underline{u} = 0$, unabhängig davon, ob in e) Massendiffusion zugelassen ist oder nicht. Falls $F \approx O(1)$ oder größer ist, kann man auch noch näherungsweise $\nabla \cdot \underline{u} = 0$ setzen. Denkt man sich nämlich die linke Seite von e) in d) eingesetzt, so sind die Terme

$(1 + \int \bar{\varphi} + \varepsilon F \bar{\varphi})$ und $\frac{1}{2} F \{ E'_h \Delta_h \bar{\varphi} + E'_v \varphi_{zz} \} + \frac{1}{2} \frac{\delta}{\varepsilon} E'_v \bar{\varphi}_{zz}$ miteinander zu vergleichen. Die Größen FE'_h , FE'_v oder $\frac{\delta}{\varepsilon} E'_v$ sind aber im allgemeinen $\ll 1$ (s. Anhang), wenn man von Extremfällen absieht, dh. also, auch im Fall $F \geq O(1)$ gilt die Näherung.

Extremfälle sind eventuelle Ränder oder Grenzschichten, an denen man dann aber eine andere Skalierung wählen würde.

Die hydrostatische Approximation führt dazu, daß man im Fall des Auftretens von instabiler Schichtung kein Konvektionsmechanismus für eine Stabilisierung einsetzen kann. Das Modell simuliert in üblicher Art die konvektive Adjustierung durch ein momentanes vertikales Vermischen der Wassermassen, d.h. simuliert $E'_v \rightarrow \infty$, (Simons, 1973).

Dividiert man die Erhaltungsgleichung für die Dichte (1.1.2-6e) durch F , so lautet sie

$$(1.1.2-7) \quad \rho_t + \xi \tilde{u} \cdot \nabla \rho + B w \bar{\rho}_z =$$

$$\frac{1}{2} \left\{ E'_h \Delta_h \rho + E'_v \rho_{zz} \right\} + \frac{1}{2} \frac{\gamma E'_v}{\xi F} \bar{s}_{zz} .$$

Die Burger-Zahl $B = \gamma/F$ bestimmt dabei den Einfluß der Dichte (LeBlond und Mysak, 1978). Ist $B = O(\xi)$, so sind horizontale und vertikale Dichteadvektion für Zeitskalen $> f^{-1}$ von gleicher Bedeutung. An Flußmündungen oder Fronten kann $\nabla_h \rho$ außerdem Extremwerte annehmen, die durch die Skalierung nicht erfasst werden. Im Modell wird daher für eine möglichst gute Skalenüberdeckung die Dichteadvektion vollständig berücksichtigt. Die nicht-linearen Terme in der Bewegungsgleichung (Impulsadvektion) werden hingegen vernachlässigt. In erster Näherung sind sie ohnehin von geringer Bedeutung, wenn $\xi \ll 1$. Sie sind auch von kleinerer Ordnung als die vertikale Dichteadvektion. In schmalen Durchlässen wie z.B. im Bornholmgatt ($L_0 = 30\text{km}$, $U_0 = 5\text{cm/s} \Rightarrow \xi \approx 0.2$) können sie allerdings von Bedeutung sein.

Heftige Stürme mit starken Fronten können stark nicht-lineare Trägheitsschwankungen der Strömung erzeugen (BOSEX-Experiment, Krauß (1980)). Da während BALTIC'75 keine derartigen Wetterlagen auftraten, werden die nicht-linearen Terme nicht berücksichtigt. Ein scheinbarer Effekt könnte durch variable Austauschkoeffizienten simuliert werden.

In der Ekman-schicht kann $A_v^M = O(100\text{cm}^2/\text{s})$ werden, d.h. die Ekman-schicht beträgt $D_E = O(50\text{m})$ und reicht damit häufig lokal bis zum Boden der Ostsee. In diesem Fall ist $E_v \approx O(10^{-1})$ und das Verhältnis von nicht-linearen Termen in den Bewegungsgleichungen zur vertikalen Reibung

$Re_v = \xi / (\frac{1}{2} E_v) \approx O(10^{-2})$ ist sehr klein, d.h. Reibung

überwiegt. Für Werte $A_h^M \approx 0(10^6 \text{ cm}^2/5)$ beträgt die horizontale Ekman'sche Schicht etwa $0(5 \text{ km})$, wenn man "no-slip" Bedingungen an der Küste fordert. Die Schichtdicke liegt also unterhalb der Modellauflösung von 10 km . Das Verhältnis von nicht-linearen Termen zur horizontalen Reibung beträgt $Re = \ell / (\frac{1}{2} E_h) \approx 0(10)$, d.h. die horizontale Reibung hat untergeordnete Bedeutung.

Auch wenn die Reibungsterme lokal von niedriger Größenordnung sind, müssen sie schon aus mathematischen Gründen mitgenommen werden, da sie den Typ der Differentialgleichungen durch die höhere Ableitungsordnung verändern. In 1.2 wird außerdem erörtert, daß bei Verwendung der horizontalen "no-slip" Bedingung die Forderung $A_h = 0$ zu einem nicht sachgemäß gestellten Problem führt.

Hätte man statt der Dichteerhaltungsgleichung die Erhaltungsgleichungen für Temperatur und Salzgehalt verwendet, so wäre man bezüglich der Skalenanalyse zu ähnlichen Aussagen gekommen wie oben.

Bei Verwendung der Vorhersagegleichungen für T , S ist der Arbeitsaufwand jedoch höher, so daß stattdessen die Dichteerhaltungsgleichung bevorzugt wurde.

Mit den oben aufgeführten Approximationen lauten die Modellgleichungen in dimensionierter Form jetzt:

(1.1.2-6)

$$a) u_t - fv + \frac{1}{\rho_0} p_x = \nabla_h \cdot (A_h^M \nabla_h u) + (A_v^M u_z)_z - [\tilde{u} \cdot \nabla u]$$

$$b) v_t + fu + \frac{1}{\rho_0} p_y = \nabla_h \cdot (A_h^M \nabla_h v) + (A_v^M v_z)_z - [\tilde{v} \cdot \nabla v]$$

$$c) \rho g + p_z = 0$$

$$d) u_x + v_y + w_z = 0$$

$$e) \rho_t + \tilde{u} \cdot \nabla \rho = \nabla_h \cdot (K_h \nabla \rho) + (K_v \rho_z)_z ,$$

wobei die nicht-linearen Terme in den beiden Bewegungsgleichungen der Vollständigkeit halber mit angegeben sind (eckige Klammern).

1.1.3 Randbedingungen und Vertikalintegration

Die in den Gleichungen (1.1.1-5) ausgedrückten Erhaltungssätze werden durch entsprechende Randbedingungen ergänzt. Für alle Ränder und Grenzflächen $F(x,y,z,t) = 0$ werden die Flüsse von Impuls, Masse, Wärme, Salz entweder am Rand gewissen Stetigkeitsbedingungen unterworfen oder besonders spezifiziert, wobei am Rand die molekularen Prozesse überwiegen können und entsprechend parametrisiert werden müssen.

Sei $\tilde{n} = \{F_x, F_y, F_z\} / |\nabla F|$ die Flächennormale von F und

$\hat{\nabla}_\alpha = A_h^\alpha \nabla_h + A_v^\alpha \frac{\partial}{\partial z}$ ein Gradientenoperator ($\alpha = T$ oder S), so

gilt mit $\tilde{\pi}$ als Spannungstensor $\tilde{\pi}_{ih} = p S_{ik} + R_{ik}$ für das mittlere Feld die:

(1.1.3-1) Dynamische Bedingung

$$\tilde{\pi}_1 \cdot \tilde{n} = \tilde{\pi}_2 \cdot \tilde{n} ,$$

wobei der Spannungstensor evtl. ausserhalb des Meeres (π_2) spezifiziert wird.

Dabei sind die Komponenten Π_{\sim} bzw. die R_{ik} z.B. durch (1.1.1-3) gegeben.

(1.1.3-2) Kinematische Bedingung

$$F_t + u_1 \cdot \nabla F = F_t + u_2 \cdot \nabla F$$

(1.1.3-3) Bedingung für Wärmefluß

$$\hat{\nabla}_{T_1} (T_1 \cdot \nabla F) = \hat{\nabla}_{T_2} (T_2 \cdot \nabla F)$$

(1.1.3-4) Bedingung für Salzfluß

$$\hat{\nabla}_{S_1} (S_1 \cdot \nabla F) = \hat{\nabla}_{S_2} (S_2 \cdot \nabla F)$$

Im allgemeinen Fall hat man an einem Rand F also 6 Randbedingungen zur Verfügung. Ohne turbulente Diffusion hin-

gegen nur 2, weil dann $\hat{\nabla}_{\alpha} = 0$ und $R_{ik} \equiv 0$. Da man für die Gl. (1.1.1-5) ohne Diffusionsterme und ohne Vernachlässigung der nicht-linearen Terme im Falle eines offenen Randes aus mathematischen Gründen 1-5 Bedingungen benötigt (§ 1.2.6), muss man andere als die Bedingungen (1.1.3-1) bis (1.1.3-4) verwenden.

Hat man keine Diffusion oder Reibung und einen festen Rand, so ist die kinematische Bedingung die einzige, da der feste Rand jeden Druck aufnehmen muß. Auch mathematisch genügt eine Bedingung (§ 1.2.6).

Die oben aufgeführten Bedingungen werden im Anhang A 1.1 für die Ränder Meeresoberfläche, Meeresboden, Fläche $z = \text{const}$, feste seitliche Begrenzung und offene seitliche Begrenzung im einzelnen aufgelistet. Die ersten beiden Ränder sowie der Schichtrand $z = \text{const}$ werden für die Vertikalintegration in homogenen Schichten benötigt.

Für viele Zwecke ist es ausreichend, die Modellrechnungen in der barotropen, vertikalintegrierten Ostsee auszuführen. Aus diesem Grund, und außerdem, weil das System (1.1.2-6) für die Diskretisierung in baroklinen und barotropen Anteil aufgespalten wird, sollen hier die aus dem System (1.1.2-6a) - (1.1.2-6e) zwischen der Oberfläche $z = \zeta$ und dem Boden $z = -H$ vertikal-integrierten Gleichungen aufgeführt werden, wobei die im Anhang A 1.1. angegebenen Randbedingungen bei ζ und H verwendet werden.

Durch Aufspaltung von ρ in konstanten Anteil ρ_0 und Variation lautet die vertikal-integrierte Gleichung (1.1.2-5c):

$$(1.1.3-5) \quad p = p_e + p_i \quad ,$$

wobei p_e der "barotrope" und p_i der "barokline" Druckanteil ist mit

$$(1.1.3-6) \quad p_e = p_a + \rho_0 g(\zeta - z), \quad p_i = \int_z^\zeta g(\rho - \rho_0) dz.$$

Mit der Definition

$$(1.1.3-7) \quad \tilde{v} = \int_{-H}^\zeta u dz \quad (\text{Volumentransport})$$

erhält man unter Vernachlässigung von Niederschlag und Verdunstung das vertikal-integrierte System (Krauß 1973, Simons 1980) mit $h = H + \zeta$:

(1.1.3-8)

$$\begin{aligned} \text{a) } U_t - fV + gh\left(\zeta + \frac{p_a}{\rho_0 g}\right)_x &= \frac{1}{\rho_0} (\tau^{sx} - \tau^{bx}) - \nabla_h \cdot A^* h \nabla_h \frac{U}{h} \\ &= - \frac{1}{\rho_0} \int_{-H}^\zeta \frac{\partial p_i}{\partial x} dz - \nabla_h \cdot \frac{U}{h} \tilde{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } v_t + fU + gh(\zeta + \frac{p_a}{\rho_o g})_y - \frac{1}{\rho_o} (\tau^{sy} - \tau^{by}) - \nabla_h \cdot A^* h \Delta_h \frac{v}{h} \\ = - \frac{1}{\rho_o} \int_{-H}^{\zeta} \frac{\partial p_i}{\partial y} dz - \nabla_h \cdot \frac{v}{h} \tilde{v} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ (Kontinuitätsgleichung).}$$

Dabei sind in A^* die durch die Vertikalintegration der nicht-linearen Terme vernachlässigten Abweichungen vom konstanten Stromprofil (Scherungseffekt) und der horizontale Austausch (A_h) parametrisiert.

Die für die Modellrechnungen in der homogenen Ostsee $p_i \equiv 0$ verwendeten Gleichungen entsprechen (1.1.3-8) mit der Approximation $H + \zeta \approx H$ und der Vernachlässigung der nicht-linearen Terme.

Als mittlere Geschwindigkeit wird $\bar{u} = \frac{v}{H + \zeta}$ definiert. In

1.2.4. werden die Randbedingungen für die vertikal-integrierte Gleichung diskutiert. Physikalisch steht im reibungsfreien Fall nur die Bedingung

$$(1.1.3-9) \quad \tilde{v}_n = 0 \text{ an der Küste}$$

zur Verfügung, obwohl am offenen Rand eventuell mehr gebraucht werden.

Im reibungsbehafteten Problem ergibt sich durch die Vorgabe von "slip" oder "no-slip"-Bedingungen die Möglichkeit, den tangentialen Volumentransport \tilde{v}_{tang} vorzuschreiben. In den Modellrechnungen wird mit $A^* \neq 0$ die Bedingung

$$(1.1.3-10) \quad \tilde{v}_{\text{tang}} = 0 \text{ an der Küste}$$

gefordert.

1.1.4

Anfangsbedingungen

Die Frage, ob das Modell mit vorgegebenen Anfangswerten der Variablen $u, v, w, \varrho, p, T, S$ gestartet werden kann, wird in §1.2 untersucht, (Cauchy Problem). Unter Vernachlässigung von Reibung und Diffusion ist das System (1.1.1-1) hyperbolisch und damit ist das Cauchy-Problem grundsätzlich lösbar, wobei eine der Variablen ϱ oder p über die Zustandsgleichung festgelegt wird. Die Frage nach der Eindeutigkeit und stetigen Abhängigkeit der Lösung von den Anfangsbedingungen ist nur unter einschränkenden Annahmen zu beantworten.

Durch die vorgenommenen Approximationen (Hydrostatik, vereinfachte Kontinuitätsgleichung, Inkompressibilität) ist das System (1.1.2-6) im diffusionsfreien Fall nicht mehr hyperbolisch (§1.2). Es kommen statt 5 nur noch 3 Zeitableitungen vor, so daß die Frage entsteht, wie die Vertikalgeschwindigkeit w und wie der Druck p zur Zeit $t = 0$ vorgegeben werden sollen.

Ist ϱ zur Zeit $t = 0$ vorgegeben, so läßt sich p durch Vertikalintegration berechnen (1.1.2-6), wenn die Meeresoberfläche ζ und der Luftdruck p_a zur Zeit $t = 0$ bekannt ist:

$$(1.1.4-1) \quad p = p_a + \int_z^{\zeta} \varrho g dz .$$

Ebenso läßt sich w durch Vertikalintegration der Kontinuitätsgleichung berechnen zu

$$(1.1.4-2) \quad w = \zeta_t + \underline{u}(\zeta) \cdot \nabla \zeta + \int_z^{\zeta} \nabla_h \cdot \underline{u}_h dz$$

mit $\zeta_t = U_x + V_y$ (U, V = Massentransport).

Sind u, v, φ, ζ zur Zeit $t=0$ bekannt, so lassen sich p und w also entsprechend berechnen. Durch Einsetzen dieser Beziehungen in das System (1.1.1-6) entsteht ein kompliziertes Integro-Differentialgleichungssystem oder durch Elimination und Differentiation ein System höherer Ordnung, das numerisch sehr ungünstig zu behandeln ist.

Daher geht man bei der Modellierung meistens zur Diskretisierung in homogene Schichten über, wie in §1.3. erläutert wird.

Der Nachweis der Sachgemäßheit des Problems wird dabei durch den der Varianzerhaltung (Energieerhaltung) ersetzt.

Für die Modellrechnungen genügt die Vorgabe der Variablen u, v, φ in jeder Schicht z_k zur Zeit $t=0$ für alle x, y . Da Reibung vorhanden ist, müssen an Meeresoberfläche und Boden zusätzlich die Schubspannungen und Flüsse vorgegeben werden, im Inneren bestimmen die Austauschkoeffizienten zusammen mit den durch Vorgabe der u, v verursachten Scherungen die Schubspannungen und Flüsse.

1.2. Die mathematischen Grundlagen

Sowohl bei der Auswahl der Differenzenverfahren als auch bei der Vorgabe der Randbedingungen ist es notwendig, den Typ des Differentialgleichungssystems zu kennen. Insbesondere interessiert die Frage, ob ein Problem bei vorgegebenen Rand- bzw. Anfangsbedingungen sachgemäß gestellt ist ("well posed", d.h. ob eine eindeutige Lösung existiert, die stetig von den Anfangs- (oder Rand-) Bedingungen abhängt. Benutzt man z.B. Differenzenverfahren höherer Ordnung, so benötigt man mehr Randbedingungen, als für die Sachgemäßheit des Problems erlaubt sind (Kreis und Oliger, 1973). Aus dieser Überbestimmtheit können numerische Probleme entstehen. Ähnliche Schwierigkeiten entstehen bei der Verwendung von Integrationsgebieten mit offenen Rändern (siehe z.B. Sundström (1977) und Paschen (1980)).

Da man jedes partielle Differentialgleichungssystem höherer Ordnung in ein quasi-lineares System 1. Ordnung überführen kann, bietet es sich an, die Typenklassifizierung für ein quasi-lineares System 1. Ordnung zu definieren. Bei dieser Klassifikation interessiert insbesondere, ob ein System hyperbolisch ist, da das Anfangswertproblem für hyperbolische Systeme grundsätzlich lösbar ist und unter weiteren einschränkenden Bedingungen auch sachgemäß gestellt ist.

1.2.1 Definition der Klassifizierung von quasi-linearen Systemen 1. Ordnung

Gegeben sei das System quasi-linearer Gleichungen im Raum $R^n \times x_0$

$$(1.2.1-1) \quad A_0(\underline{U}, \underline{x}) \underline{U}_{\underline{x}_0} + \sum_{i=1}^n A_i(\underline{U}, \underline{x}) \underline{U}_{\underline{x}_i} + B(\underline{U}, \underline{x}) = 0$$

mit \underline{U} als k -dimensionalem Spaltenvektor der k unbekannten Funktionen u_1, \dots, u_k und \underline{x} als Ortsvektor (x_0, x_1, \dots, x_n) .

$\underline{U}_{\underline{x}_i}$ ist der Spaltenvektor mit den Komponenten $\partial u_1 / \partial x_i, \dots, \partial u_k / \partial x_i$. Die A_i sind $k \times k$ Matrizen, die singular sein können, B ist ein Spaltenvektor mit k Spalten.

Man nennt das System (1.2.1-1) hyperbolisch in x_0 -Richtung am Punkt \underline{x}_p , wenn bei beliebiger Vorgabe reeller Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ mit $\sum \lambda_i^2 = 1$ die verallgemeinerte Eigenwertgleichung

$$(1.2.1-2) \quad A(\underline{x}_p) \underline{r} = \left(\lambda A_0(\underline{x}_p) + \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i(\underline{x}_p) \right) \underline{r} = 0$$

k reelle Eigenwerte $\lambda^{(j)}$ und k paarweise linear unabhängige Rechts-Eigenvektoren $\underline{r}^{(j)}$ besitzt (nach Jeffrey 1976).

Gibt es k verschiedene reelle Eigenwerte $\lambda^{(j)}$, so gibt es auch k linear, unabhängige Eigenvektoren $\underline{r}^{(j)}$. In diesem Fall nennt man das System streng oder total hyperbolisch.

Sind hingegen die Eigenwerte der Matrix A_0 bezüglich der Matrix $\sum \lambda_i A_i$ bzw. die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P(\lambda) = |\lambda A_0 + \sum \lambda_i A_i|$ sämtlich komplex, so heißt das System elliptisch. (Courant und Hilbert, 1962). Besitzt $P(\lambda)$ s reelle und p konjugiert komplexe Nullstellen mit $s + 2p = k$, so heißt das System ultrahyperbolisch.

Der parabolische Fall ist schwerer einzuordnen.

Hängt die charakteristische Form $|\lambda A_0 + \sum \lambda_i A_i|$ von

$$(1.2.1-1) \quad A_0(\underline{U}, \underline{x}) \underline{U}_{\underline{x}_0} + \sum_{i=1}^n A_i(\underline{U}, \underline{x}) \underline{U}_{\underline{x}_i} + B(\underline{U}, \underline{x}) = 0$$

mit \underline{U} als k -dimensionalem Spaltenvektor der k unbekannten Funktionen u_1, \dots, u_k und \underline{x} als Ortsvektor (x_0, x_1, \dots, x_n) .

$\underline{U}_{\underline{x}_i}$ ist der Spaltenvektor mit den Komponenten $\partial u_1 / \partial x_i, \dots, \partial u_k / \partial x_i$. Die A_i sind $k \times k$ Matrizen, die singular sein können, B ist ein Spaltenvektor mit k Spalten.

Man nennt das System (1.2.1-1) hyperbolisch in x_0 -Richtung am Punkt \underline{x}_p , wenn bei beliebiger Vorgabe reeller Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ mit $\sum \lambda_i^2 = 1$ die verallgemeinerte Eigenwertgleichung

$$(1.2.1-2) \quad A(\underline{x}_p) \underline{r} = \left(\lambda A_0(\underline{x}_p) + \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i(\underline{x}_p) \right) \underline{r} = 0$$

k reelle Eigenwerte $\lambda^{(j)}$ und k paarweise linear unabhängige Rechts-Eigenvektoren $\underline{r}^{(j)}$ besitzt (nach Jeffrey 1976).

Gibt es k verschiedene reelle Eigenwerte $\lambda^{(j)}$, so gibt es auch k linear, unabhängige Eigenvektoren $\underline{r}^{(j)}$. In diesem Fall nennt man das System streng oder total hyperbolisch.

Sind hingegen die Eigenwerte der Matrix A_0 bezüglich der Matrix $\sum \lambda_i A_i$ bzw. die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P(\lambda) = |\lambda A_0 + \sum \lambda_i A_i|$ sämtlich komplex, so heißt das System elliptisch. (Courant und Hilbert, 1962). Besitzt $P(\lambda)$ s reelle und p konjugiert komplexe Nullstellen mit $s + 2p = k$, so heißt das System ultrahyperbolisch.

Der parabolische Fall ist schwerer einzuordnen.

Hängt die charakteristische Form $|\lambda A_0 + \sum \lambda_i A_i|$ von

irgendeinem der Parameter $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ nicht ab, so nennt man das System parabolisch ausgeartet. Hängt sie z.B. nicht von λ ab, so ist das System parabolisch in x_0 -Richtung. Alle Definitionen gelten im allgemeinen quasi-linearen Fall nur punktweise. In Sauer und Szabó (1969) werden Systeme als parabolisch bezeichnet, wenn $P(\lambda)$ k nicht notwendig verschiedene Nullstellen besitzt, zu denen aber nur weniger als k linear unabhängige Eigenvektoren gehören.

Für eine spezielle Klasse von parabolisch ausgearteten Differentialgleichungen ist das Cauchy-Problem immer sachgemäß gestellt. Zu dieser Klasse gehört z.B. die Wärmeleitungsgleichung (Kreiss und Oligier, 1973).

Für andere Zwischentypen, z.B. wenn das charakteristische Polynom weniger als k Nullstellen besitzt, sind keine Bezeichnungen bekannt.

Zu einer anschaulichen Bedeutung der Definition kommt man, wenn man λ als Frequenz oder Phasengeschwindigkeit deutet und die λ_i als normierte Wellenzahlen. Verschiedene Lösungen des charakteristischen Polynoms $\lambda^{(j)}$ entsprechen dann verschiedenen charakteristischen Untermannigfaltigkeiten, jede Nullstelle $\lambda^{(j)}$ stellt die Phasengeschwindigkeit einer Welle dar.

Die Klassifizierungen sind im allgemeinen unabhängig vom Spaltenvektor \underline{B} , da $P(\lambda)$ nicht von \underline{B} abhängt, aber die Phasen $\lambda^{(j)}$ werden durch \underline{B} modifiziert. Außerdem ist \underline{B} von Bedeutung, wenn man den Typ der Wellen etwa nach den rücktreibenden Kräften klassifiziert. Auch können manche Wellenlösungen durch entsprechende Randbedingungen unterbunden werden bzw. nur durch die Ränder existieren (z.B. Oberflächenwellen).

1.2.2 Typeneinteilung der kompressiblen, reibungs- und diffusionsfreien Gleichungen

Die Klassifizierung von Differentialgleichungen und Differentialgleichungssystemen der Hydrodynamik ist von jeher für verschiedene Problemstellungen und Approximationen von Interesse gewesen. So wurden von Hough (1898) insbesondere die Laplace'sche Gezeitengleichung hinsichtlich ihrer Hyperbolizitätsbereiche untersucht. Die Untersuchungen wurden später von Longuet-Higgins (1964, 1965) fortgeführt. Courant und Friedrichs (1948) untersuchten die nicht-linearen barotropen und kompressiblen Gleichungen unter der Bedingung der Stationarität. Courant und Hilbert (1962) betrachteten die instationären Euler'schen Bewegungsgleichungen im 2-dimensionalen Raum. Die (reibungsbefaheten) Navier-Stokes-Gleichungen sind in Ladyzhenskaya (1963) ausführlich behandelt. Kreiss und Olliger (1973) und Sundström (1977) beschäftigen sich ausführlich mit den Flachwassergleichungen.

Im Zusammenhang mit dem Initialisierungsproblem in der Wettervorhersage betrachtet Ghil (1975) auch barokline Probleme. Krauß (1966) und Magaard (1968) untersuchten die Hyperbolizitätsbereiche der Gleichungen für interne Wellen im reibungslosen Medium.

Für die numerische Integration von instationären Problemen ist die Lösbarkeit oder sogar Sachgemäßheit des Cauchy-Problems hydrodynamischer Systeme von Bedeutung. Daher werden im folgenden einige Systeme auf ihre Hyperbolizität hin untersucht:

Fall 1

Für die 7 Funktionen $u, v, w, p, \varrho, S, e$ (Strömung, Druck, Dichte, Salzgehalt, innere Energie) werden auf einer

β -Ebene die 3 Bewegungsgleichungen, die Kontinuitätsgleichung, der 1. Hauptsatz der Wärmelehre, eine Gleichung für die Salzerhaltung und eine Zustandsgleichung betrachtet, wie sie für ein reibungsfreies und diffusionsfreies Medium gelten. Als Kräfte sind die Schwerkraft und die Corioliskraft zugelassen (z nach oben).

(1.2.2-1)

$$\begin{aligned}
 \text{a) } u_t + \xi(uu_x + vu_y + wu_z) + \frac{1}{\varrho} p_x + \hat{f}w - fv &= 0 \\
 \text{b) } v_t + \xi(uv_x + vv_y + wv_z) + \frac{1}{\varrho} p_y + fu &= 0 \\
 \text{c) } \delta^2 \left\{ w_t + \xi(uw_x + vw_y + ww_z) \right\} + \frac{1}{\varrho} p_z + g - \hat{f}u &= 0 \\
 \text{d) } \gamma^2 (\varrho_t + u\varrho_x + v\varrho_y + w\varrho_z) + \varrho(u_x + v_y + w_z) &= 0 \\
 \text{e) } e_t + ue_x + ve_y + we_z + \frac{p}{\varrho} (u_x + v_y + w_z) &= 0 \\
 \text{f) } S_t + uS_x + vS_y + wS_z &= 0
 \end{aligned}$$

(1.2.2-2)

$$\vartheta = \vartheta(p, S, e)$$

$$\text{mit } f = 2\Omega \sin \varphi \text{ und } \hat{f} = 2\Omega \cos \varphi .$$

Setzt man $\xi = \delta^2 = \gamma^{-2} = 1$, so erhält man dieses System ohne Approximationen z.B. aus Krauß (1973).

Um gleich einige Approximationen und Vereinfachungen mitzubehandeln, sind die Größen ξ, δ^2, γ^2 eingeführt worden:

$$\xi = \begin{cases} 0 & \text{Vernachlässigung der nicht-linearen Terme} \\ & \text{in den Bewegungsgleichungen} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\xi^2 = \begin{cases} 0 & \text{Hydrostatische Approximation} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\gamma^2 = \begin{cases} 0 & \text{Inkompressibel und ohne Diffusion oder} \\ & \text{Approximation der Kontinuitätsgleichung} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Denkt man sich die Zustandsgleichung nach p aufgelöst,
also

$$(1.2.2-3) \quad p = p(\varrho, S, e),$$

so kann man in den Differentialgleichungen (1.2.2-1) die
Ableitungen von p durch solche der Größen ϱ, S und e
ersetzen:

$$(1.2.2-4) \quad p_{x_i} = c^2 \varrho_{x_i} + b S_{x_i} + a e_{x_i}$$

mit

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_{S,e} \quad (\text{Quadrat der Schallgeschwindigkeit})$$

$$a = \left(\frac{\partial p}{\partial e} \right)_{S,\varrho}, \quad b = \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_{\varrho,e}.$$

Der inkompressible Fall ist dann mit $1/c^2 \rightarrow 0$ (also auch $\gamma = 0$) identisch. ξ entspricht einer Rossby-Zahl, wenn man die Gleichungen dimensionslos macht, δ dem Verhältnis von vertikaler zu horizontaler Skala.

Faßt man nun $\underline{U} = \{u, v, w, g, e, S\}$ als Spaltenvektor auf, so ist das System (1.2.2-1) in der Form (1.2.1-1) darstellbar, die Matrizen A_0, A_1, B und A sind im Anhang A1.2 angegeben.

Das charakteristische Polynom $P^t(\lambda)$ lautet dann

$$(1.2.2-5) \quad P^t(\lambda) = (\lambda + \xi \delta)^2 (\lambda + \sigma)^2 \left\{ \frac{\delta^2 \gamma^2}{c^2} (\lambda + \xi \delta)(\lambda + \sigma) - \left(1 + \frac{ap}{2\gamma^2} \gamma^2 \right) (\lambda_3^2 + \delta^2 [\lambda_1^2 + \lambda_2^2]) \right\}$$

mit $\sigma = \underline{1} \cdot \underline{u}$ und $\underline{1} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\underline{u} = (u, v, w)$.

Im Fall $\xi = \delta^2 = \gamma^2 = 1$ folgt daraus wegen $\sum \lambda_i^2 = 1$

$$(1.2.2-6) \quad P^t(\lambda) = (\lambda + \delta)^4 \left\{ (\lambda + \delta)^2 - c^2 \left(1 + \frac{ap}{2\gamma^2} \right) \right\}.$$

Im Fall der hydrostatischen Approximation oder der Inkompressibilität des Mediums werden zwei Eigenwerte eliminiert, so daß die Ordnung des charakteristischen Polynoms ausartet, wenn die Schallwellen vernachlässigt werden. Das System ist dann nicht hyperbolisch im oben definierten Sinne. Dies erkennt man auch daran, daß auf Grund der vereinfachten Kontinuitätsgleichung die Gradienten der Strömungskomponenten nicht mehr frei wählbar sind. Physikalisch gesehen eliminiert man durch die

Inkompressibilitätsbedingung einen entsprechenden Anpassungsmechanismus.

Es gibt 3 verschiedene reelle Nullstellen von (1.2.2-6):

(1.2.2-7)

$$\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}, \lambda^{(4)} = -\sigma = -\lambda_1 u - \lambda_2 v - \lambda_3 w$$

$$\lambda^{(5)} = -\sigma + c \sqrt{1 + \frac{ap}{g^2 c^2}}$$

$$\lambda^{(6)} = -\sigma - c \sqrt{1 + \frac{ap}{g^2 c^2}}$$

d.h. also, $\lambda^{(1)}$ bis $\lambda^{(4)}$ fallen zusammen, $\lambda^{(5)}$ und $\lambda^{(6)}$ entsprechen den Schallwellen, wobei $\left| \frac{ap}{g^2 c^2} \right| \ll 1$ nur ein kleiner Korrekturterm ist.

Das System (1.2.2-1) ist aber im Sinne der oben angegebenen Definition hyperbolisch in t-Richtung, denn es gibt 6 linear unabhängige Rechtseigenvektoren (Anhang A1.2).

Würde man dem System (1.2.2-1) noch eine Erhaltungsgleichung für irgendeine passive Substanz ψ hinzufügen, also $d\psi/dt=0$, so würde man die Ordnung von $P^t(\lambda)$ genau um 1 erhöhen, d.h. man erhielte nochmals einen Eigenwert $\lambda = -\sigma$, zu dem sich wieder ein linear unabhängiger Eigenvektor finden lassen würde.

Daraus kann man schließen, daß nicht alle Nullstellen von $P(\lambda)$ einen physikalisch interessanten Wellentyp entsprechen müssen. Das liegt daran, daß sich das Bewegungsfeld unabhängig von der passiven Substanz ψ entwickelt.

Im System 1.2.2-1 ist keine passive Substanz enthalten, denn p, S, e (oder T , siehe nächster Fall) beeinflussen die Dichte über die Zustandsgleichung und damit das Bewegungsfeld. Gleichwohl können S und T sich aber so ändern, daß ρ nicht beeinflußt wird.

Dieser Prozeß kann z.B. durch Doppeldiffusion bestimmt werden (Turner 1973, S255ff). Da hier die diffusionsfreien Gleichungen betrachtet wurden, ist der Prozess nicht direkt enthalten. Dennoch wird man bei Hinzunahme von Wärme- und Salzdifffusion (gedämpfte oder instabile) Oszillationen erhalten.

Auf die 6 möglichen Wellen und ihre physikalische Bedeutung wird weiter unten eingegangen.

Fall 2

Würde man statt des ersten Hauptsatzes der Wärmelehre fordern, daß die gesamte Wärme des Systems erhalten bleibt, so könnte man die Wärmeleitungsgleichung

$$(1.2.2-8) \quad \frac{dT}{dt} = 0$$

an Stelle von (1.2.2-1e) verwenden (W.Krauß, 1973). Durch diese Ersetzung ändert sich an den wesentlichen Eigenschaften des Systems nichts. Das charakteristische Polynom lautet

$$(1.2.2-9) \quad P^t(\lambda) = (\lambda + \epsilon\delta)^2 (\lambda + \delta)^2 \left\{ \frac{\delta^2 \gamma^2}{c^2} (\lambda + \epsilon\delta)(\lambda + \delta) - \right. \\ \left. - [\lambda_3^2 + \delta^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)] \right\}$$

mit den Nullstellen

$$\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(4)} = -\delta, \quad \lambda^{(5)} = -\delta + c, \quad \lambda^{(6)} = -\delta - c$$

wenn $\xi = \delta^2 = \gamma^2 = 1$.

Bei den Konstanten a, b, c^2 muß man entsprechend e durch T ersetzen. Im übrigen gilt die im Fall 1 geführte Diskussion hier identisch.

Fall 3

Da einer der sich in den diffusionsfreien Fällen 1 und 2 ergebenden Eigenwerte physikalisch nicht interessant ist, wird $S = 0$ gesetzt, d.h. Gleichung (1.2.1-1f) entfernt und statt (1.2.1-1e) der 1. Hauptsatz der Wärmelehre in der Form

$$(1.2.2-9A) \quad \frac{1}{c^2} \frac{dp}{dt} - \frac{d\varrho}{dt} = 0$$

bzw.

$$(1.2.2-9B) \quad \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} + u p_x + v p_y + w p_z \right\} - (\varrho_t + u \varrho_x + v \varrho_y + w \varrho_z) = 0$$

verwendet (C.Eckart, 1960).

Für dieses System sind im Anhang A1.2-3 wieder die Matrizen A_0, A_1, A und B angegeben.

Das charakteristische Polynom lautet

$$(1.2.2-10) \quad P^t(\lambda) = (\lambda + \delta)^2 (\lambda + \delta) \left\{ \frac{\delta^2 \gamma^2}{c^2} (\lambda + \xi \delta) (\lambda + \delta) - \right. \\ \left. - [\lambda_3^2 + \delta^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)] \right\}$$

und ist bis auf den Wegfall einer Nullstelle identisch mit (1.2.2-9).

Die Nullstellen sind reell und die entsprechenden Rechtseigenvektoren linear unabhängig, d.h. auch dieses System ist hyperbolisch (Anhang A1.2-4).

Fall 4

Verwendet man das System (1.2.2-1a-d) und fordert Barotropie $\varrho = \varrho(p)$ bzw. $p = p(\varrho)$, so erhält man das charakteristische Polynom

$$(1.2.2-11) \quad P^t(\lambda) = (\lambda + \xi \sigma)^2 \left\{ \frac{\delta^2 \gamma^2}{c^2} (\lambda + \xi \sigma)(\lambda + \sigma) - \right. \\ \left. - [\lambda_3^2 + \delta^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)] \right\}.$$

$P^t(\lambda)$ hat 4 reelle Nullstellen für den Fall $\delta^2 = \gamma^2 = 1$, sie lauten für $\xi = 1$

$$\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)} = -\sigma$$

$$\lambda^{(3)} = -\sigma + c$$

$$\lambda^{(4)} = -\sigma - c$$

und die entsprechenden Rechtseigenvektoren sind linear unabhängig (Jeffrey, 1976). Das System ist also im kompressiblen Fall wieder hyperbolisch in t-Richtung.

Diskussion der Fälle 1-4

Alle 4 Systeme sind lokal hyperbolisch in t-Richtung, solange das Medium kompressibel ist und man nicht hydrostatisch approximiert. Sie sind jedoch nicht strikt hyperbolisch. Das Cauchy-Problem ist generell für sie lösbar. Im Falle, daß die Matrizen A_0 , A_1 symmetrisch

sind, ist die Lösung auch eindeutig (Courant und Hilbert, 1962) und das Cauchy-Problem für ein begrenztes Intervall $t \leq T$ sachgemäß (Kreiss und Oligier, 1973), wobei T von den Eigenschaften des Lösungsvektors \tilde{U} abhängt, z.B. \tilde{U} muß gewisse Lipschitzbedingungen erfüllen.

Fall 4 kann durch eine geeignete Matrizenmultiplikation symmetrisiert werden (z.B. Jeffrey, 1976). Da das Medium barotrop ist, kann es keine (internen) Schwerewellen geben, Oberflächenwellen würden nur an einer freien Grenzfläche existieren können. Setzt man $\vartheta = \text{const}$, eliminiert also die Schallwellen, so erkennt man durch Linearisierung und Berücksichtigung des Vektors \tilde{B} in der Form $\tilde{B} = \{-fv, fu, 0, 0\}$ mit $f = \text{const}$, daß die beiden übrigen Eigenwerte den gyroskopischen Wellen entsprechen (LeBlond und Mysak, 1978), die im Grenzfall in die Trägheitsschwingungen übergehen. (Die Berücksichtigung von g ist nicht sinnvoll, da es nirgendwo Dichteänderungen gibt).

Es scheint zunächst befremdlich, daß im Fall 4 mit $\vartheta = \text{const}$ keine Rossby-Wellen zu sehen sind, die auch ohne das Vorhandensein der Schwerkraft existieren können. Betrachtet man die inkompressiblen homogenen Gleichungen

$$(1.2.2-12a) \quad \tilde{u}_t + 2\tilde{\Omega} \times \tilde{u} + \nabla(p/\varrho_0) = 0$$

$$(1.2.2-12b) \quad \nabla \cdot \tilde{u} = 0 \quad ,$$

so erhält man durch die Anwendung des Operators $\nabla \times$ auf die erste Gleichung mit Hilfe der zweiten Gleichung die Beziehung

$$(1.2.-13) \quad (\nabla \times \tilde{u})_t - (2\tilde{\Omega} \cdot \nabla)\tilde{u} - \tilde{u}(\nabla \cdot 2\tilde{\Omega}) + (\tilde{u} \cdot \nabla)2\tilde{\Omega} = 0,$$

die koordinatenunabhängig ist und z.B. zunächst keine β - Ebenen Approximation enthält.

Ist $|\Omega|$ konstant, so fallen die letzten beiden Terme weg und man erhält gyroskopische Wellen. Legt man ein kartesisches System so, daß die z-Richtung mit der Ω -Richtung zusammenfällt, das Koordinatensystem also mit Ω um die z-Achse einer Wasserkugel rotiert, dann ist $|\Omega|$ wieder konstant und es gibt nur gyroskopische Wellen.

Nur auf einer gekrümmten Fläche kann Ω variieren, z.B. auf einer Kugelfläche. Dieser Sachverhalt wird bei obiger Klassifizierung nicht erfaßt..

Betrachtet man ein kartesisches System, in dem Ω die Komponenten $\Omega = \{0, 0, f(y)\}$ hat, so schreiben sich die Gleichungen (1.2.2-13) in Komponenten

$$(1.2.2-14a) \quad (w_y - v_z)_t - f u_z = 0$$

$$(1.2.2-14b) \quad (u_z - w_x)_t - f v_z = 0$$

$$(1.2.2-14c) \quad (v_x - u_y)_t - f w_z + v \frac{df}{dy} = 0.$$

Macht man nun die Annahme, daß $\partial/\partial z = 0$, die Bewegung also nur horizontal variiert, so erhält man aus

$$(1.2.2-14c) \text{ zusammen mit der Divergenzfreiheit } u_x + v_y = 0$$

die bekannte Gleichung

$$(1.2.-15) \quad \nabla^2 v_t + \frac{df}{dy} v_x = 0 ,$$

die nur noch einen Wellentyp zulässt, nämlich die Rossbywellen.

Verzichtet man auf die Annahme $\partial/\partial z = 0$, so erhält man keine in y-Richtung streng periodischen Rossbywellen mehr.

Andererseits ist zu bemerken, daß die Gleichungen (1.2.2-14) nicht einer β -Ebenen Approximation entsprechen.

Fall 3 lässt Schichtung zu, so daß Schwerewellen auch im Falle, daß keine Berandungen vorhanden sind, existieren können. Ebenso wie es in diesem Fall interne Schwerewellen gibt, muß es den internen Rossby-Wellentyp geben, d.h. die 5 möglichen Wellen, die das charakteristische Polynom (1.2.2-10) zeigt, entsprechen 2 Schallwellen, 2 internen Trägheits/Schwerewellen und einer internen Rossby-Welle.

Fall 1 und 2 enthalten die Möglichkeit einer weiteren Welle, die im Zusammenhang mit den diffusionsfreien Gleichungen etwas künstlich wirkt, die aber prinzipiell Schwingungen von S und T zulässt, ohne die Dichte ρ zu beeinflussen, z.B. wenn S proportional T ist. Diese Art Oszillationen werden in Turner (1973) diskutiert ("double-diffusive convection").

Die Hyperbolizität der Fälle 1-4 gilt nur in t-Richtung. In Richtung der Raumkoordinaten verhalten sich die Gleichungen anders. Um die Gleichungen in räumlichen Richtungen zu klassifizieren, muß man in den charakteristischen Polynomen nur eins der λ_i mit λ vertauschen und die entsprechenden Nullstellen aufsuchen. Betrachtet man etwa das charakteristische Polynom (1.2.2-11) des Falles 4 im zweidimensionalen Raum, also etwa $\lambda_3 = 0$, so erhält man bei Vertauschung von λ und λ_1 , also bei Klassifizierung in x-Richtung, das charakteristische Polynom

$$(1.2.2-16) \quad P^x(\lambda) = (\lambda_1 + \varepsilon \lambda u + \varepsilon \lambda_2 v)^2 \left\{ (\lambda_1 + \varepsilon \lambda v + \varepsilon \lambda_2 v) \cdot (\lambda_1 + \lambda u + \lambda_2 v) - c^2 (\lambda^2 + \lambda_2^2) \right\}.$$

Im stationären Fall, $\lambda_1 \rightarrow 0$, erhält man wegen
 $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$

$$(1.2.2-17) \quad P^X(\lambda) = \xi^2(\lambda u + v)^2 \{ \xi(\lambda u + v)^2 - c^2(\lambda^2 + 1) \}.$$

Ist $\xi = 1$, so gibt es nur reelle Nullstellen, falls $u^2 + v^2 > c^2$. Wenn aber $u^2 + v^2 < c^2$ ist, so gibt es 2 komplex konjugierte Nullstellen und eine reelle doppelte Nullstelle, d.h. das entsprechende System ist ultrahyperbolisch. Fordert man zusätzlich die Rotationsfreiheit der Strömung, so ist die doppelte reelle Nullstelle $\lambda u + v = 0$ trivial erfüllt und es gibt nur noch komplexe Nullstellen (Courant und Friedrichs, 1948). Das Problem ist dann elliptisch.

Man sieht außerdem, daß im Falle $\xi = 0$ (Vernachlässigung der nicht-linearen Terme in den Bewegungsgleichungen) der ursprüngliche Satz von Gleichungen nicht mehr unabhängig ist, denn das Polynom (1.2.2-17) verschwindet identisch. Dies entspricht dem geostrophischen Gleichgewicht, für das die zusätzliche Forderung der Divergenzfreiheit nicht nötig ist.

1.2.3 Einordnung der inkompressiblen, reibungs- und diffusionsfreien Gleichungen

Fall 5

Betrachtet wird auf der β -Ebene das System

(1.2.3-1)

$$a) \quad \rho u_t + \varepsilon \rho (uv_x + vu_y + wu_z) + p_x + \rho \hat{f}w - \rho f v = 0$$

$$b) \quad \rho v_t + \varepsilon \rho (uv_x + vv_y + wv_z) + p_y + \rho f u = 0$$

$$c) \quad \delta^2 \left\{ \rho w_t + \varepsilon \rho (uw_x + vw_y + ww_z) \right\} + p_z + \rho g - \rho \hat{f}u = 0$$

$$d) \quad \rho_t + u \rho_x + v \rho_y + w \rho_z = 0$$

$$e) \quad u_x + v_y + w_z = 0 \quad .$$

Das System beschreibt bekanntlich in seiner um einen Anfangszustand $\underline{u}^{(0)}, \rho^{(0)}, p^{(0)}$ linearisierten Form interne Wellen.

Das charakteristische Polynom erhält man aus (1.2.2-10) für $c^2 \rightarrow \infty$ zu

$$(1.2.3-2) \quad P^{(t)}(\lambda) = (\lambda + \varepsilon G)^2 (\lambda + G) \left\{ \lambda^2 + \delta^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \right\} .$$

Das System ist nicht mehr hyperbolisch in t-Richtung, denn es hat nur 3 (reelle) Nullstellen bezüglich λ statt 5.

Dennoch sind die 3 reellen Nullstellen nach wie vor Wellen zugeordnet (2 Schwere/Trägheitswellen, 1 Rossbywelle). In den jeweiligen Raumkoordinaten ist das charakteristische Polynom vom Grad 5, solange $\xi = 1$.

Zur Klassifizierung in z-Richtung muß man λ und λ_3 vertauschen:

(1.2.3-3)

$$P^z(\lambda) = \left\{ \lambda^2 + \delta^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \right\} \left\{ \lambda_3 + \xi (\lambda_1 u + \lambda_2 v) + \xi \lambda w \right\}^2$$

$$\left\{ \lambda_3 + (\lambda_1 u + \lambda_2 v) + \lambda w \right\}.$$

Im Fall $\xi = 1$ und $w \neq 0$ gibt es 3 reelle Nullstellen für λ . Solange keine hydrostatische Approximation gemacht wird, gibt es außerdem 2 konjugiert komplexe Nullstellen, d.h. das System ist ultrahyperbolisch in z-Richtung. Falls $\delta^2 \rightarrow 0$ (hydrost. Approximation), erhält man eine reelle zweifache Nullstelle $\lambda = 0$. Es gibt jedoch zu $\lambda = 0$ keine 2 linear unabhängigen Eigenvektoren, d.h. das System ist auch für $\delta^2 = 0$ nicht hyperbolisch.

In x - Richtung erhält man ähnliche Ergebnisse.

Fall 6

Betrachtet man interne Wellen als Störungen des Grundzustandes $\tilde{u}^{(0)} = 0$, $\varrho^{(0)} = \varrho_0(z)$ und $p^{(0)} = p_0(z)$, so folgt unter der Annahme der Boussinesq-Approximation für mittlere Breiten mit $p = \tilde{p}/\varrho^*$

(1.2.3-4)

$$a) \quad u_t + p_x - fv = 0$$

$$b) \quad v_t + p_y + fu = 0$$

$$c) \quad \delta^2 w_t + p_z + g g = 0$$

$$d) \quad g_t + w \Gamma = 0 \quad \text{mit} \quad \Gamma = \frac{1}{\delta} \frac{d g_0}{dz}$$

$$e) \quad u_x + v_y + w_z = 0 \quad .$$

Das charakteristische Polynom hierfür kann man aus (1.2.3-2) bekommen, wenn man $\xi = \zeta = 0$ setzt:

(1.2.3-5)

$$P^t(\lambda) = \lambda^3 \left\{ \lambda_3^2 + \delta^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \right\}$$

d.h. weder in t-Richtung noch in z-Richtung ist das System in die oben aufgeführte Klassifikation einzuordnen.

Diese Tatsache steht scheinbar im Widerspruch zu den Untersuchungen von Magaard (1968), der die Störung um einen geostrophisch balanzierten Grundstrom betrachtet, und Krauß (1978). Mit einem periodischen Ansatz in t wird dort nach algebraischen Umformungen von zu (1.2.3-1) bzw. (1.2.3-4) ähnlichen Systemen eine Differentialgleichung für eine einzige unbekannte Funktion hergeleitet, für die es unter gewissen Bedingungen Hyperbolizitätsbereiche in den Raumrichtungen gibt.

Dazu ist zu bemerken, daß die in 1.2.1 definierte Klassifikationsmethode nicht die inhomogene Seite des Diff.-Systems benutzt, daß aber durch die Eliminationsprozedur die rechten Seiten in die resultierende

Einzeldifferentialgleichung eingehen. Durch den Eliminationsprozeß werden daher implizit noch Differenzierbarkeitseigenschaften und Verträglichkeitsbedingungen gefordert, die im Ausgangssystem erster Ordnung nicht enthalten sind. Außerdem werden durch den periodischen Ansatz in t eingeschränkte Hyperbolizitätsbereiche definiert (z.B. $\omega < f$ etc.).

Zur Behandlung der Systeme (1.2.3-1) als Anfangsrandwertproblem mit einem oberen und unteren Rand in der Vertikalen geht man in der Praxis zu den vertikalintegrierten Gleichungen über und betrachtet diese Gleichungen sowie deren Abweichungen vom vertikalen Mittel.

Das Anfangswertproblem der inkompressiblen, vertikalintegrierten Gleichungen ist im linearen Fall sachgemäß.

1.2.4 Einordnung der vertikalintegrierten Gleichungen

Aus dem System (1.1.2-8) kann man unter Vernachlässigung der internen Druckgradienten $\partial p_i / \partial x$ und Weglassen des Windstresses τ^s bei konstanten A_h^* die Gleichungen (Fall 7)

(1.2.4-1)

$$a) U_t + \varepsilon \nabla_h \cdot \left(\frac{U}{h} \mathbf{V} \right) + c^2 \zeta_x - fV + \rho_0^{-1} \tau^{bx} = r A_h^* \Delta U$$

$$b) V_t + \varepsilon \nabla_h \cdot \left(\frac{V}{h} \mathbf{V} \right) + c^2 \zeta_y + fU + \rho_0^{-1} \tau^{by} = r A_h^* \Delta V$$

$$c) \zeta_t + \nabla_h \cdot \mathbf{V} = 0$$

herleiten, wobei $h = H + \alpha \zeta$ und $c^2 = g(H + \alpha \zeta)$.

Mit $\xi = 0$ oder $\xi = 1$ kann man die Vernachlässigung oder Mitnahme der nicht-linearen Terme in der Bewegungsgleichung kontrollieren, mit $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1$ die Annahme $|\xi| \ll H$. Mit $r = 0,1$ die Vernachlässigung oder Mitnahme der horizontalen Reibung. Durch die Vertikalintegration und die entsprechenden Randbedingungen sind die Schwerewellen explizit in das System aufgenommen.

Das System läßt sich für $r = 0$ wieder in der Form (1.2.1-1) schreiben, die Matrizen A_0 , A_1 , A_2 , B und A sind im Anhang (A1.2) definiert.

Setzt man $\sigma = \lambda_1 \bar{u} + \lambda_2 \bar{v} = (\lambda_1 U + \lambda_2 V)/h$,
so folgt für das charakteristische Polynom:

(1.2.4-2)

$$P^{\pm}(\lambda) = \lambda^3 + 3 \xi \sigma \lambda^2 + \left\{ \xi \sigma^2 (2\xi + \alpha) - c^2 \right\} \lambda + \xi \sigma (\alpha \xi \sigma^2 - c^2) .$$

Die Nullstellen lauten

$$\lambda^{(1)} = - \xi \sigma + c \sqrt{1 + \xi \frac{\sigma^2}{c^2} (\xi - \alpha)}$$

$$\lambda^{(2)} = - \xi \sigma - c \sqrt{1 + \xi \frac{\sigma^2}{c^2} (\xi - \alpha)} \quad \text{mit } c = \sqrt{g(H + \alpha \xi)}$$

$$\lambda^{(3)} = - \xi \sigma ,$$

d.h. unabhängig von der Wahl $\xi = 0,1$ oder $\alpha = 0,1$ sind alle Nullstellen reell und verschieden. Damit ist das System (1.2.4-1) als streng hyperbolisch erkannt.

$\lambda^{(1)}$ und $\lambda^{(2)}$ stellen die Phasengeschwindigkeit der Schwerewellen dar, $\lambda^{(3)}$ muß den Rossbywellen zugeordnet werden.

Die Phasengeschwindigkeiten werden wie in den Fällen oben noch durch die im Spaltenvektor \mathbf{B} enthaltenen Terme ($f \times \mathbf{V}$ und ∇H) modifiziert.

Das Verhalten der $\lambda^{(i)}$ bei den verschiedenen Vernachlässigungen sieht man aus der folgenden Tabelle:

ξ	α	$\lambda^{(1)}$	$\lambda^{(2)}$	$\lambda^{(3)}$
0	0	\sqrt{gH}	$-\sqrt{gH}$	0
0	1	$\sqrt{g(H+\xi)}$	$-\sqrt{g(H+\xi)}$	0
1	0	$-\sigma + \sqrt{gH(1 - \frac{\sigma^2}{gH})}$	$-\sigma - \sqrt{gH(1 + \frac{\sigma^2}{gH})}$	$-\sigma$
1	1	$-\sigma + \sqrt{g(H+\xi)}$	$-\sigma - \sqrt{g(H+\xi)}$	$-\sigma$

Die relativen Phasengeschwindigkeiten unterscheiden sich für $|\xi| \ll H$ und $\sqrt{gH} \gg |\mathbf{V}|$ nicht.

Es ist nicht klar ob das Anfangswertproblem für das voll nicht-lineare System (1.2.4-1) sachgemäß gestellt ist. Unter der Voraussetzung $H = \text{const}$ kann man das System symmetrisieren (z.B. Oliger und Kreiss 1973), d.h. das Anfangswertproblem ist sachgemäß für ein Intervall $t \leq T$. Im linearen Fall $\xi = \alpha = 0$ läßt sich das System auch für $H = \text{const}$ symmetrisieren (s. Anhang A1.2). Linearisiert man um einen Zustand $\sigma = \sigma_0 = \lambda_1 \bar{u}_0 + \lambda_2 \bar{v}_0$ mit $\alpha = 0$, so ist das Anfangswertproblem für ein genügend glattes $H(x,y)$ sachgemäß für alle t . (Kreiss und Oliger, 1973, Sundström, 1977).

Erweitert man die Gleichungen (1.2.4-1) durch Reibungsterme ($r = 1$, rechte Seite), so folgt im vereinfachten

$$\text{Fall } \partial/\partial y = f = \gamma^{bx} = \gamma^{by} = \xi = \alpha = 0$$

(1.2.4-2)

$$a) \quad U_t + c^2 \zeta_x - A_h^* U_{xx} = 0$$

$$b) \quad \zeta_t - U_x = 0$$

und daraus durch Elimination von ζ

$$(1.2.4-3) \quad U_{tt} + (c^2 + A_h^* \frac{\partial}{\partial t}) U_{xx} = 0 .$$

Diese Gleichung ist hyperbolisch für $A_h^* \rightarrow 0$ und parabolisch für $c^2 \rightarrow 0$. Sie zeigt damit schon die wesentlichen Eigenschaften des reibungsbehafteten Systems.

Ein Wellenansatz der Form $U \sim e^{i(\alpha x - \omega t)}$ und $\mu = A_h^*$

führt zur charakteristischen Beziehung

$$(1.2.4-4) \quad \omega^\pm = \alpha^2 \left\{ -\frac{1}{2} \mu \pm \sqrt{\frac{c^2}{\alpha^2} - \left(\frac{\mu}{2}\right)^2} \right\},$$

die für $\mu \neq 0$ komplexe Frequenzen ergibt. Die "Wellen" sind gedämpft, haben eine reduzierte "Phasengeschwindigkeit":

(1.2.4-5)

$$c^* = \text{Re} \left(\frac{\omega}{\alpha} \right) = \pm \sqrt{c^2 - \left(\frac{\mu}{2} \alpha \right)^2}$$

und sind dispersiv.

Man sieht außerdem, daß für den Fall, daß die Diffusionsgeschwindigkeit $\frac{\mu}{2} \kappa$ die Phasengeschwindigkeit c der Schwerewellen übertrifft, ω rein imaginär wird und damit zeitlich nur noch Dämpfung möglich ist. Diese Tatsache führt, wie noch beschrieben wird, auch im vollständigen viskosen Fall zu einer unterschiedlichen Behandlung des Austauschterms hinsichtlich des Differenzenverfahrens.

Die Klassifizierung in die herkömmlichen Typen "hyperbolisch", "parabolisch" läßt sich bei dem viskosen System (1.2.4-2) nicht verwenden. Dasselbe gilt für den zweidimensionalen Fall (1.2.4-1) mit $r = 1$, der sich weder als hyperbolisch noch als parabolisch klassifizieren läßt. Sundström (1977) bezeichnet das reibungsbehaftete System als "unvollständig parabolisch". Es hat bezüglich des Anfangswertproblems und des gemischten Anfangs-Randwertproblems ähnliche Eigenschaften wie das reibungslose System, erfordert jedoch zusätzliche Randbedingungen durch das Auftreten von Ableitungen 2. Ordnung.

1.2.5 Das Anfangs-Randwertproblem für die vertikal-integrierten Gleichungen

Bei der Integration der hydrodynamischen und thermodynamischen Gleichungen von einem Anfangszustand aus (Cauchy-Problem) müssen zu den Anfangsbedingungen wegen der Abgeschlossenheit der Integrationsgebiete (Meeresgebiete) auch noch Randbedingungen vorgegeben werden. Anzahl und Art der Randbedingungen werden, mathematisch gesehen, durch die Art des Differentialgleichungssystems

und (im nichtlinearen Fall) durch dessen Lösung bestimmt. Die Anfangs- und Randbedingungen haben im allgemeinen auch eine sinnvolle physikalische Entsprechung.

Betrachtet man das hyperbolische System erster Ordnung,

$$(1.2.5-1) \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + A_1 \frac{\partial \underline{U}}{\partial x} + \dots = 0$$

in der \underline{U} einen k -spaltigen Vektor und A_1 eine $k \times k$ Matrix darstellt, für das Gebiet $0 \leq x \leq 1$, so ist nach Kreiss und Olinger (1973) die Anzahl der Randbedingungen bei $x = 0$ durch die Anzahl der positiven, bei $x = 1$ durch die Anzahl der negativen Eigenwerte gegeben.

Die positiven und negativen Eigenwerte entsprechen verschiedenen charakteristischen Richtungen. Untersucht man die reibungsfreien vertikal-integrierten Gleichungen (1.2.4-1), so erhält man für die Eigenwerte der Matrix A_1 (siehe Anhang A1.2.-6):

$$(1.2.5-2)$$

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} &= \xi \bar{u} + \hat{c} \\ \lambda^{(2)} &= \xi \bar{u} - \hat{c} \quad \text{mit } \hat{c} = c \sqrt{1 + \frac{\bar{u}^2}{c^2} \xi (\xi - \alpha)}, \\ \lambda^{(3)} &= \xi \bar{u} \quad c^2 = g(H + \alpha \zeta) \text{ und } \bar{u} = U/(H + \alpha \zeta) \end{aligned}$$

Im Fall, daß $\xi = 1$ (nicht-linear) und $\alpha \neq 1$ (ζ wird nicht gegen H vernachlässigt) erhält man also

$$\lambda^{(1)} = \bar{u} + c, \quad \lambda^{(2)} = \bar{u} - c, \quad \lambda^{(3)} = \bar{u}.$$

Die Anzahl der positiven und negativen Eigenwerte von A_1 hängt also von \bar{u} selbst ab.

Wird \bar{u} positiv in x -Richtung gezählt und nimmt man $c > \bar{u}$ an, so benötigt man bei $x = 0$ (linker Rand) zwei Randbedingungen, wenn \bar{u} in das Gebiet hineinzeigt ("Einstrom-Fall"), jedoch nur eine Randbedingung, wenn \bar{u} aus dem Gebiet herauszeigt ("Ausstrom-Fall"). Bei $x = 1$ (rechter Rand) gilt im Einstrom-Fall bzw. Ausstrom-Fall dasselbe. Im für ozeanographische Anwendungen uninteressanteren Fall $c < \bar{u}$ benötigt man bei $x = 0$ für Einstrom sogar 3 Randbedingungen.

Da die Eigenwerte lokal von der Lösung abhängen, nennt man die Punkte bei $x = 0$ "Einstrom-Punkte", wenn $\bar{u} > 0$, und "Ausstrom-Punkte", wenn $\bar{u} < 0$. Die Definition für $x = 1$ sind entsprechend mit anderen Vorzeichen.

Im linearen Fall ($\xi = 0$) braucht man nur jeweils eine Randbedingung für den linken und rechten Rand, da $\lambda^{(3)} = 0$ wird. Im Spezialfall der Gleichung (1.2.5-1) kann man $\bar{u} = 0$ für $x = 0$ und $x = 1$ fordern (kinematische Randbedingung). Da diese Bedingung physikalischen Ursprungs ist, muß sie an einem festen Rand immer gelten, so daß \bar{u} dort aus natürlichen Gründen verschwinden muß und damit auch im nicht-linearen Fall am festen Rand nur jeweils eine Bedingung benötigt wird.

Hat man einen offenen Rand vorliegen, so sind im nicht-linearen Fall zusätzliche Randbedingungen zu formulieren.

Die obigen Betrachtungen gelten nach Kreiss und Olinger (1973) unabhängig von der Anzahl der unabhängigen Variablen und einer möglichen rechten Seite für (1.2.5-1).

Bezüglich eines y -Randes ist \bar{u} durch \bar{v} zu ersetzen, die obigen Aussagen gelten dann sinngemäß. Im Falle eines gekrümmten Randes hat man die Betrachtungen in einem tangential berührenden Koordinatensystem zu führen. In einem numerischen Modell sind die Bedingungen nur für geradlinige Ränder vorzugeben, jedoch gibt es hier Schwierigkeit, daß die Bedingungen in den jeweiligen Koordinatenrichtungen an den Eckpunkten des Gitters kompatibel sein müssen.

Aus obigem geht hervor, daß eine notwendige Bedingung für die Sachgemäßheit mindestens die richtige Anzahl von Randbedingungen ist. Schwieriger ist es, die Form der Randbedingungen so zu wählen, daß das Problem sachgemäß ist, hier muß man eventuell in jedem Einzelfall den Nachweis führen.

Das System (1.2.5-1) läßt sich lokal diagonalisieren, indem man $\tilde{U}^* = R^{-1}U^*$ als einen Funktionsvektor definiert, in (1.2.5-1) einsetzt und von links mit R^{-1} multipliziert, wobei R die Matrix der Eigenvektoren von A_1 ist. (Siehe Anhang A1.2-8). Das System lautet dann

$$(1.2.5-3) \quad \frac{\partial \tilde{U}^*}{\partial t} + A_1^* \frac{\partial \tilde{U}^*}{\partial x} + \dots = 0, \quad A_1^* = R^{-1}A_1R \quad .$$

Dabei ergibt sich im linearen Fall (siehe Anhang)

$$(1.2.5-4) \quad \tilde{U}^* = \begin{pmatrix} U_1^* \\ U_2^* \\ U_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2(\zeta + \frac{U}{c}) \\ 1/2(\zeta - \frac{U}{c}) \\ V \end{pmatrix}, \quad A_1^* = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da der zu U_3^* gehörige Eigenwert von A_1^* verschwindet, wird V weder am linken noch am rechten Rand benötigt. U_1^* hingegen muß am linken, U_2^* am rechten Rand spezifiziert werden, entsprechend dem Vorzeichen der Eigenwerte. Kreiss und Oliger (1973) fordern, daß die zu den l positiven Eigenwerten gehörenden Komponenten von \tilde{U}_I^* am linken Rand als Linearkombination der zu den $(k-l)$ nicht-positiven Eigenwerten gehörenden Komponenten \tilde{U}_{II}^* vorgegeben werden, wobei die Form der Linearkombination physikalisch sinnvoll (z.B. Reflexionsgesetze, Grenzflächenbedingung) gewählt werden kann:

$$(1.2.5-5) \quad \tilde{U}_I^* = F \tilde{U}_{II}^* + f(t) \quad (\text{am linken Rand})$$

mit F = Matrix der Ordnung $l \times (k-l)$ und $f(t)$ einer beliebigen Funktion. Für den rechten Rand gilt entsprechendes sinngemäß.

Im obigen Beispiel kann man $U_1^* = U_2^*$ am linken oder rechten Rand setzen; dies ist gleichbedeutend mit der Forderung $U = 0$ (Grenzflächenbedingung). Ist der linke Rand offen, so kann man setzen: $U_1^* = -U_2^* + \zeta_0(t)$, d.h. $\zeta = \zeta_0(t)$. Damit ist dann auch der Massentransport durch den linken Rand festgelegt und kann nicht mehr unabhängig vorgegeben werden. Andererseits kann auch ein Transport $U_0(t)$ durch

die Forderung $U_1^* = U_2^* + \frac{U_0(t)}{c}$ am linken offenen Rand vorgegeben werden. Wurtele et al. (1971) verwenden die Bedingung $U_1^* = 0$ bzw. U_2^* am offenen Rand.

Im nicht-linearen Fall ist an Einstrompunkten eines offenen Randes noch eine weitere Randbedingung vorzuschreiben. Da der zur $U_3^* = V$ -Komponente gehörige



Eigenwert nicht mehr verschwindet, ist z.B. die V Komponente am Einstrompunkt vorzugeben. Sundström (1977) zeigt, daß bei konstanter oder nur langsam veränderlicher mittlerer Strömung \bar{u} das mit den erwähnten Randbedingungen versehene System der reibungsfreien vertikal integrierten Gleichungen bei konstanter Wassertiefe sachgemäß ist.

Das unvollständig parabolische System (1.2.4-1) für $r = 1$ kann nicht mit den oben verwendeten Methoden hinsichtlich des gemischten Randwertproblems untersucht werden. Nach Sundström (1977) benötigt man aber ^{jeweils} eine Randbedingung am linken und am rechten Rand zusätzlich, also insgesamt 5 Bedingungen.

In derselben Arbeit werden Vorschläge für Bedingungen gemacht die zwar die Sachgemäßheit des Problems erzwingen, physikalisch aber etwas undurchsichtig sind.

Vernachlässigt man die nicht-linearen Terme in der Bewegungsgleichung oder hat man feste Ränder, so benötigt man nur noch 4 Randbedingungen. Im vorliegenden Modell werden mit Einführung einer Randreibungsschicht und entsprechender "no-slip" Bedingung die Randbedingungen $\bar{u} = 0$ am linken und rechten Rand verwendet. Dieser Fall ist als Spezialfall in Sundström (1977) enthalten und damit sachgemäß gestellt.

Eine andere Art von Randbedingungen am offenen Rand ist die sogenannte Sommerfeldt'sche Ausstrahlungsbedingung

$$(1.2.5-6) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} + c \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 (\text{am Rand}) \quad ,$$

wie sie von Pearson (1974) betrachtet wird. Dabei steht ψ jeweils für die abhängigen Variablen. Pearson zeigt, daß bei Verwendung von (1.2.5-6) eine Welle mit der Phasengeschwindigkeit c vollkommen durch den Rand transmittiert wird. Wenn aber die Welle eine andere Phasengeschwindigkeit hat oder wenn man die Randbedingung diskretisiert, wird ein Teil der Welle reflektiert und kann nach endlicher Zeit zur Zerstörung der Lösung führen, da das Problem nicht mehr sachgemäß ist. Versuche, die jeweils günstigste Phasengeschwindigkeit numerisch zu bestimmen und dann (1.2.5-6) anzuwenden, finden sich bei Orlanski (1976) und Camerlengo und O'Brien (1980). Die Lösungen werden aber im allgemeinen nach einiger Integrationszeit unbrauchbar.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die Anfangs-Randwert-Probleme im vertikal-integrierten, reibungsfreien und reibungsbehafteten linearen oder linearisierten Fall keine Schwierigkeiten hinsichtlich der Sachgemäßheit bereiten, wenn die Wassertiefe und mittleren Strömungen hinreichend langsam veränderlich und die Randbedingungen "vernünftig" sind (s.oben).

Untersuchungen über die Sachgemäßheit barokliner Probleme sind sehr viel schwieriger. Sie werden im nächsten Abschnitt erörtert.

1.2.6 Das Anfangs-Randwertproblem für die baroklinen Gleichungen

Betrachtet man z.B. das barokline System (1.2.2-1a-1d), (1.2.2-1f) und (1.2.2-8), so ergibt sich

$$(1.2.6-1) \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + A_1 \frac{\partial \underline{U}}{\partial x} + \dots = 0$$

mit $\underline{U} = \{u, v, w, \varphi, S, T\}$ und A_1 wie im Anhang (A1.2 -1) angegeben.

Für $\xi = \delta^2 = \gamma^2 = 1$ (siehe 1.2.2) erhält man die Eigenwerte von A_1 aus (1.2.2-9), wenn man $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ setzt, zu:

$$\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(4)} = u; \quad \lambda^{(5)} = u + c, \quad \lambda^{(6)} = u - c.$$

Im allgemeinen Fall benötigt man insgesamt also 6 Randbedingungen. Da c in diesem Fall die Schallgeschwindigkeit darstellt, und $c \gg u$, folgt $\lambda^{(5)} > 0$ und $\lambda^{(6)} < 0$, d.h. es muß jedenfalls eine Randbedingung am linken und eine am rechten Rand vorgegeben werden. Die Vorgabe der anderen Randwerte richtet sich danach, ob ein Einstrom oder Ausstrompunkt vorliegt. Im Fall $u = 0$ (z.B. fester Rand) ist am linken bzw. rechten Rand nur eine Bedingung nötig.

Dieselbe Aussage gilt im Fall $\delta^2 = \gamma^2 = 1$ auch für die anderen Raumdimensionen y, z .

Im Fall der Inkompressibilität $\gamma^2 = 0$ hingegen ist das System, wie bereits erwähnt, nicht mehr hyperbolisch;

Im Fall $\delta^2 = 0$, also im Fall der hydrostatischen Approximation, artet das System derart aus, daß in (1.2.6-1) eine triviale Nullzeile entsteht, da in der dritten Bewegungsgleichung weder Ableitungen nach x, y noch nach t vorkommen.

Oliger und Sundström (1976) kommen bei ihrer Analyse zu dem Schluß, daß in diffusionsfreien baroklinen Systemen jede Spezifikation von lateralen Randbedingungen zu einem unsachgemäßen Problem führt. Läßt man jedoch Reibung und Diffusion zu, so werden laterale Randbedingungen notwendig. Im Falle eines festen Randes ist dies unproblematisch, führt jedoch bei offenen Rändern zu unerwünschten Randschichten.

Die Sachgemäßheit von nicht-hyperbolischen Systemen wird oft durch die "Energimethode" bewiesen, die das Prinzip der Erhaltung der Varianz aller vorherzusagenden Größen verwendet.

Dieses Prinzip wird bei den meisten heute vorhandenen numerischen Modellen auch im diskreten Fall befolgt.

1.3 Die Diskretisierung in finiten Differenzen

Die zu integrierenden Gleichungen (1.1.2-6) werden vertikal und horizontal diskretisiert, wobei die einschlägigen Methoden benutzt werden (z.B. Bryan (1969), Simons (1973), Haney (1974)). Da die Ostsee ein Nebenmeer ist, das in vieler Hinsicht den Großen Seen in Nordamerika ähnlich ist, wird das Modell von Simons als Grundlage verwendet. Das letztere ist ein baroklines Mehrschichtenmodell, daß sowohl in Simons (1973) als auch in Simons (1980) beschrieben ist. Es wird daher nur auf einige spezielle Abänderungen und Details eingegangen, die dort nicht behandelt werden. Die Diskretisierung in vertikale Schichten, die auch bei den Betrachtungen in §1.1.4 als sinnvoll erkannt wurde, kann auf zwei verschiedene Arten vorgenommen werden:

1. Das Gebiet wird vertikal in vorgegebenen Abständen D_k durch Flächen $z = \text{const}$ unterteilt. Durch die Flächen ist der Fluß von Impuls und Masse möglich.
2. Das Gebiet wird vertikal durch Grenzflächen $\vartheta_k = \text{const}$ unterteilt, die sich bewegen können $Z_k = h(x, y, t)$.

Während man die erste Art der Diskretisierung als mathematische Approximation der in z kontinuierlichen Gleichungen (1.1.6-2) auffassen kann, ist die 2. Art die mathematisch exakte Beschreibung einer physikalischen Approximation (Pedlosky 1979), die beide ihre Vor- und Nachteile haben.

Die zweite Methode führt zu dem Problem, daß Grenzflächen im gesamten oder in Teilgebieten verschwinden können, die Meeresoberfläche und den Boden zu verschiedenen Zeiten und an verschiedenen Orten schneiden und eventuell wieder neu definiert werden müssen.

In den vorliegenden Modellrechnungen wird die erste Art bevorzugt, die je nach Schichtdicke einen starken vertikalen Diskretisierungsfehler aufweisen kann, dafür aber in der mathematischen Formulierung bedeutend einfacher zu handhaben ist.

Die Integration in der Zeit wird über ein explizites Verfahren bewältigt, es müssen also keine Gleichungssysteme gelöst werden. Dafür muß man das Verhältnis von räumlicher Gitterweite und Zeitschritt beschränken, abhängig von der lokalen Phasengeschwindigkeit der schnellsten Wellen des Systems oder von der lokal schnellsten Diffusionsgeschwindigkeit. In den meisten Fällen ist erstere Bedingung die größere Einschränkung (Courant-Friedrich-Levy-Bedingung).

Die Diskretisierung in horizontaler und vertikaler Richtung ist so eingerichtet, daß in Abwesenheit von Reibung und Diffusion die Varianz aller Größen erhalten bleibt.

1.3.1 Diskretisierung in vertikale Schichten

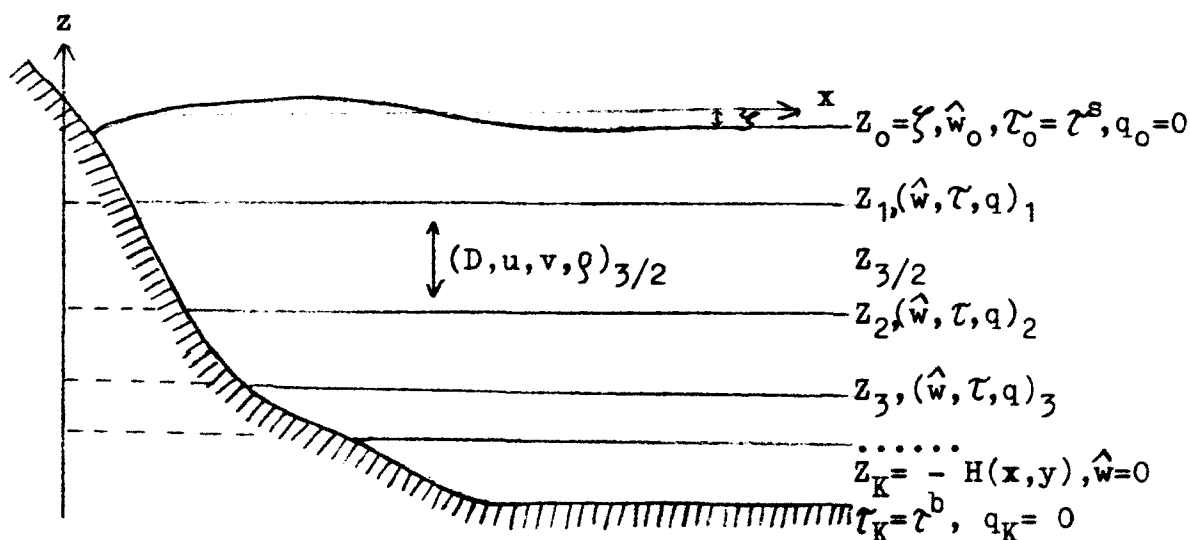


Abb. (1.3-1)

Die Diskretisierung wird durch obige Abbildung deutlich, wobei die $Z_k, k=0, \dots, K(x,y)$ die Schichtgrenzen, $D_{k+1/2}$ die Schichtdicken sind, für die gilt: $D_{k+1/2} \gg \zeta$. \hat{w}_k ist die zur Grenzfläche Z_k gehörende Normalengeschwindigkeit, τ_k, q_k die an der Grenzfläche wirkenden Schubspannungen und diffusiven Massenflüsse. K ist die Anzahl der Schichten. Für die vorliegenden Rechnungen wurde $K_{\max} = 1, 4$ oder 10 verwendet ($K = K(x,y) \leq K_{\max}$!).

Die Gleichungen (1.1.2-6) werden zwischen den Schichtgrenzen Z_k und Z_{k-1} vertikal integriert. Die hydrostatische Grundgleichung wird dazu benutzt, die horizontalen Gradienten vom barotropen (p_e) und baroklinen (p_i) Druckanteil zu berechnen, die Kontinuitätsgleichung für die Berechnung der Vertikalgeschwindigkeit an den Flächen Z_k . Die exakte Formulierung der Schichtgleichungen ist in Simons (1973) zu finden und wird hier nicht im Einzelnen beschrieben.

Die Bewegungsgleichung für die mittlere Geschwindigkeit \bar{u} in der k -ten Schicht ($Z_{k-1}-Z_k$) lautet im wesentlichen für $k=1, \dots, K(x,y)$:

(1.3.1-1)

$$\frac{\partial \bar{u}_{k-1/2}}{\partial t} - f \bar{u}_{k-1/2} + \frac{1}{g_0} \frac{\partial p_e}{\partial x} + \frac{1}{g_0} \int_{Z_k}^{Z_{k-1}} \frac{\partial p_i}{\partial x} dz - \frac{1}{g_0} (\tau_{k-1} - \tau_k) \dots = 0$$

mit $\zeta_k^x = -A_{v_k}^* \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial z}$ und $\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial z} = 2 \frac{\bar{u}_{k-1/2} - \bar{u}_{k+1/2}}{D_{k-1/2} + D_{k+1/2}}$

$\tau_0 = \tau^s$ ist der Windschub, $\tau_{K(x,y)} = \tau^b$ die Bodenschubspannung. An dieser Gleichung sieht man deutlich den Mechanismus der Impulsübertragung von einer Schicht zur anderen.

Summiert man die Bewegungsgleichungen der Schichten auf, so bekommt man per Konstruktion die vertikal integrierten Bewegungsgleichungen für den Volumentransport (1.1.2-8).

Bildet man andererseits jeweils die Differenz zwischen aufeinanderfolgenden Schichten, so erhält man K-1 Vorhersagegleichungen für die Geschwindigkeitsdifferenzen

$\bar{u}_k = \bar{u}_{k-1/2} - \bar{u}_{k+1/2}$. Die K-1 Gleichungen für die "Scherungen" \bar{u}_k zusammen mit der vertikalintegrierten Bewegungsgleichung des Volumentransportes geben insgesamt wieder K Gleichungen, die formal eine ganz ähnliche Struktur aufweisen.

Die Scherungsgleichungen enthalten jedoch nicht mehr den barotropen Anteil, da dieser bei der Differenzenbildung herausfällt. Andererseits ist die Bewegungsgleichung für den Volumentransport nur über die baroklinen Druckgradienten angekoppelt (1.1.2-8).

Dieses Verfahren erlaubt es nun, die Scherungsgleichungen mit einem größeren Zeitschritt zu bearbeiten, da die schnelleren Oberflächenwellen "herausgefiltert" und nur noch die langsameren internen Wellen den Zeitschritt festlegen. Bei den Modellrechnungen wurde ein 5-mal größerer Zeitschritt für die Vorhersage der Scherungen und Dichte-advektion/Diffusion verwendet.

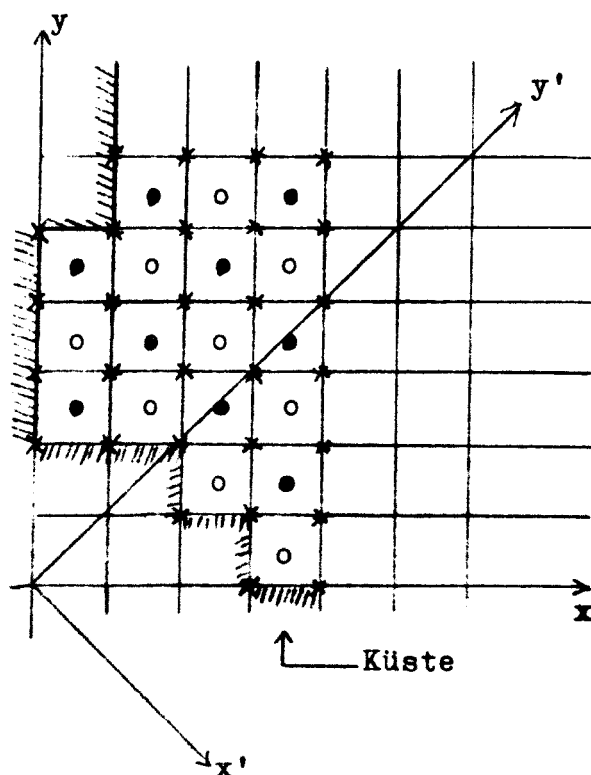
Die Gleichung der Dichteerhaltung wird ebenso wie die Bewegungsgleichungen für eine Schicht vertikal integriert. Dazu müssen die mittleren Strömungen in jeder Schicht bekannt sein. Nachdem man also die Scherungsgleichungen integriert hat, muß vor der Integration der Dichteerhaltungsgleichung aus den Scherungsgleichungen und aus dem Volumentransport wieder die Schichtströmungen berechnet werden.

Der zeitliche Ablauf des Integrationsverfahrens ist im nächsten Abschnitt und im Anhang A1.3 geschildert.

1.3.2 Diskretisierung der horizontalen und zeitlichen Koordinaten

Auf einer im Zentrum der Ostsee ($\varphi = 60^\circ$, $\lambda = 20^\circ$) berührenden Tangentialebene (§1.3.5) wird ein quadratisches Gitter mit einer Gitterweite $\Delta s = \Delta x = \Delta y = 10$ km definiert. Die Variablen sind räumlich und zeitlich gegeneinander versetzt, Abb. (1.3-2). Die Differenzenformulierung ist generell explizit. Es werden räumlich zentrale und zeitlich sowohl zentrale-als auch Vorwärtsdifferenzen verwendet (siehe unten).

Das verwendete Gitter besteht aus 2 Netzen und entspricht dem Gittertyp (E) in der Darstellung von Mesinger und Arakawa (1976). Seine Vor- und Nachteile werden dort und in Simons (1980) diskutiert.



- ζ, T, w, g -Punkte, Netz 1
- dito , Netz 2
- * U, V, u, v-Punkte, Netz 1 u.2

Küstenpunkte sind Strompunkte. Horizontale Gradienten werden im um 45° rotierten System berechnet (x', y'). Der Laplace-Operator ebenfalls.

ζ - Punkte sind auch zeitlich gegen U, V-Punkte versetzt.

Abb. (1.3-2)

Dieses Gitter ist sowohl für die Volumentransport-als auch für die Scherungsgleichungen, die eine ähnliche Struktur haben, geeignet, da sich die Randbedingungen $U_n=0$ bzw. $U_{tang}=0$ leicht vorgeben lassen. Außerdem läßt das Gitter eine günstige Approximation des Coriolis-Terms zu. Im Anhang sind die Differenzenformeln im Zusammenhang mit der Zeitintegration skizziert (A1.3).

Der Nachteil des aus 2 Netzen bestehenden Gitters ist das Auftreten von Gitterdispersion, besonders in Gebieten mit schlechter horizontaler Auflösung. Als Maß des räumlichen Diskretisierungsfehlers ist sie jedoch ein Indikator für die Güte der Differenzenapproximation. Verfahren zur Elimination von Gitterdispersion findet man z.B. bei Janjić (1974). Eine Verringerung der Gitterdispersion kann auch durch eine verbesserte Auflösung erreicht werden; dies hat unter anderem dazu geführt, daß das ursprünglich verwendete 20km-Netz der Ostsee durch ein 10-km Netz ersetzt wurde. Der Effekt der Gitterdispersion wird in §1.3.4 noch einmal aufgegriffen.

Die Integration der Kontinuitätsgleichung, der Gleichungen für den Volumentransport und der Scherungsgleichungen wird entlang der x',y' -Koordinaten ausgeführt, mit Ausnahme der horizontalen Dichteadvektion, die im x,y -System berechnet wird, wobei benötigte Zwischenpunkte nach Bedarf interpoliert werden.

Alle räumlichen Ableitungen werden durch zentrale Differenzen approximiert, so daß der Diskretisierungsfehler $O(\Delta x^2)$ beträgt. Zeitliche Ableitungen werden teils durch zentrale-, teils durch Vorwärtsdifferenzen ersetzt, so daß der Fehler hier $O(\Delta t^2)$ bzw. $O(\Delta t)$ beträgt. Bei expliziten Verfahren erfordern zentrale Differenzen im Raum auch zentrale Differenzen in der Zeit, wenn das Differentialgleichungssystem hyperbolisch ist, jedoch

Vorwärtsdifferenzen in der Zeit, wenn das System parabolisch ist, um stabile Approximationen zu erhalten. In §1.2 wurde gezeigt, daß die Modellgleichungen weder der einen noch der anderen Klasse angehören, beiden aber verwandt sind. Daher werden die Differenzenformulierungen termweise angepasst, so daß im Falle des Überwiegens des einen (z.B. Advektion) oder anderen (z.B. Diffusion) Effekts Stabilität gesichert ist.

Der horizontale Druckgradient wird in den Volumentransportgleichungen z. B. zeitlich zentral approximiert, der Austauschterm aber mit Vorwärtsdifferenzen. Die Stabilitätskriterien sind für beide Fälle verschieden (§1.3.3). Ebenso wird bei einigen Rechnungen die Dichteadvektion durch ein Lax-Wendrow-Schema (Zwei-Schritt) approximiert, die Dichtediffusion durch Vorwärtsintegration in der Zeit. Das Lax-Wendrow Integrationsschema beinhaltet eine starke numerische Diffusion, da z.B. im Falle der Gleichung $\varrho_t + u\varrho_x$ durch die Lax-Wendrow Approximation ein virtueller Diffusionsterm der Größenordnung $1/2u^2\Delta t\varrho_{xx}$ auftritt, der im Verhältnis zur physikalischen Diffusion $A\varrho_{xx}$ von Bedeutung sein kann. Im Modell wird $\Delta t \approx 15\text{min}$ verwendet. Ist dann $A \approx 10^5 \text{cm}^2/\text{s}$, so würde für $u \approx 30\text{cm/s}$ die virtuelle Diffusion von gleicher Größenordnung sein wie die physikalische. In der Vertikalen können die Verhältnisse ähnlich ungünstig sein.

Dennoch wurde ein Lax-Wendrow verwandtes Verfahren verwendet, um die Dichteerhaltungsgleichung zu integrieren. Das Prinzip ist im Anhang A1.3 skizziert. Es hat den Nachteil, daß horizontale sowie vertikale Diffusion benötigt werden, um die Rechnung stabil zu halten.

Durch Anwendung des v. Neumann'schen Ansatzes auf die Differenzengleichungen erhält man bezüglich der Bewegungsgleichungen eine charakteristische Gleichung 3. Ordnung (Gl. A1.3.-9), d.h. die Differenzengleichung erlaubt genau 3 Wellenlösungen. Da auch das kontinuierliche Problem nur 3 Lösungen zulässt (s. §1.2.4), treten also keine zusätzlichen numerischen Pseudolösungen auf, obwohl das "leap frog" Schema verwendet wird. Da nämlich U, V und ζ zeitlich versetzt sind, können im linearen Fall die numerischen Pseudolösungen nicht auftreten. Das verwendete Verfahren zur Berechnung der Dichteadvektion- und Diffusion lässt ebenfalls keine numerischen Pseudolösungen zu (s. A1.3).

1.3.3 Stabilitätsschranken

Wegen des expliziten Charakters der verwendeten Differenzenschemata müssen Zeit- und Ortsschritt gewissen Einschränkungen unterworfen werden, damit die numerische Lösung endlich bleiben kann.

Bei Verwendung eines Wellenansatzes (v. Neumann-Methode) für die im Anhang aufgeführten Differenzengleichungen der vertikalintegrierten bzw. der Scherungs-Gleichungen ergibt sich ein kubisches Polynom (Gl. A1.3-9), dessen Nullstellen $\lambda = e^{i\omega\Delta t}$ die für die Stabilität notwendige Bedingung $|\lambda| \leq 1$ erfüllen müssen. Daraus ergeben sich die folgenden Schranken, wobei A_h der Diffusionskoeffizient und B der Koeffizient für die Bodenschubspannung $\tau^b = B \nabla \zeta$ bedeutet:

1. Keine Reibung/Diffusion

$$(1.3.3-1) \quad \Delta t \leq \frac{\Delta s}{\sqrt{gH_{\max} + \left(\frac{f}{2} \Delta s\right)^2}}$$

Für $f = 0$ ist diese Bedingung identisch mit der Courant-Friedrich-Levy Schranke. Da im allgemeinen $gH \gg (f/2 \cdot \Delta s)^2$ gilt, kann der Korrekturterm $(f/2 \cdot \Delta s)^2$ für praktische Rechnungen vernachlässigt werden. Für das Ostseemodell ergibt sich wegen $H_{\max} = 233\text{m}$ die Schranke $\Delta t < 210\text{s}$, so daß ein $\Delta t = 3\text{min}$ die obige Bedingung gut erfüllt.

2. Coriolis-Effekt auf die Stabilität ist vernachlässigbar, aber Reibung/Diffusion $\neq 0$:

In diesem Fall ergeben sich die Bedingungen

$$(1.3.3-2) \quad \Delta t \leq \frac{(\Delta s)^2}{4A_h + \frac{B}{2} (\Delta s)^2}$$

und

$$(1.3.3-3) \quad \Delta t \leq \frac{\Delta s}{\sqrt{gH_{\max}}} \left(1 - \frac{2A_h/\Delta s + B\Delta s/4}{\sqrt{gH_{\max}}} \right)$$

Im allgemeinen sind die Bedingungen (1.3.3-1) oder (1.3.3-3) schärfer als (1.3.3-2). Alle Schranken können für bestimmte Wellenlängen günstiger liegen (s. Anhang A1.3). Hier sind die ungünstigsten Fälle berücksichtigt.

Wird A_h oder B zu groß, so muß Δt entsprechend eingeschränkt werden. Dies ist äquivalent mit der in 1.2.4 aufgeführten Tatsache, daß das unvollständig parabolische Gleichungssystem für große A_h in ein parabolisches System überführt wird.

Aus (1.3.3-3) geht hervor, daß $2A_h/\Delta s$ als Maß für die Diffusionsgeschwindigkeit nicht die Phasengeschwindigkeit \sqrt{gH} überschreiten darf. Ebenso kann die Bodenreibung nicht beliebig groß gewählt werden.

Da die Scherungsgleichungen in ihrer Struktur den vertikal-integrierten Gleichungen ähnlich sind, erhält man die Schranken für den "internen" Zeitschritt $\overline{\Delta t} > \Delta t$ gemäß (1.3.3-1) bis (1.3.3-3), wenn man statt g die reduzierte Schwere $g' = g\Delta\rho/\rho_0$ und B aus der Schubspannung an der Unterseite der Schicht ausrechnet.

Das verwendete Verfahren für die Dichteerhaltungsgleichung liefert jedoch eine restriktivere Bedingung.

Bei der Integration der vereinfachten Dichteerhaltungsgleichung $\rho_t + u_0\rho_x - A\rho_{xx} = 0$ mit der im Anhang A1.3 skizzierten Methode ergibt sich für die Differenzengleichung wieder eine charakteristische Gleichung (s.Gl. A1.3-16) in λ .

Aus der Bedingung $|\lambda| \leq 1$ erhält man Restriktionen für $\overline{\Delta t}$, die sowohl vom Austauschkoefizienten A für Dichte als auch von der Advektionsgeschwindigkeit u_0 abhängt.

Im Fall $u_0 = 0$ ergibt sich $\overline{\Delta t} \leq (\Delta x)^2/(2A)$, eine zu (1.3.3-3) entsprechende Bedingung. Im Fall $u_0 \neq 0$ erhält man eine kubische Gleichung für $\overline{\Delta t}$, deren numerische Auswertung zeigt, daß es Bereiche gibt, für die $|\lambda| \leq 1$ bleibt. Betrachtet man $\overline{\Delta t}$ als durch die Courant-Friedrichs-Levy-Bedingung gegeben, so ergibt sich aus Gl. (A1.3-12) mit $|\lambda| \leq 1$ eine quadratische Gleichung für A , die zwei reelle Lösungen zuläßt, solange $|u_0|$ nicht zu groß wird. Die Lösungen $A_1 < A_2$ definieren ein Intervall $[A_1, A_2]$, dessen Breite von u_0 abhängt.

Für die Modellrechnungen wurde $\overline{\Delta t} = 5 \cdot \Delta t = 15 \text{ min}$ gewählt. Bei Verwendung von $A = 10^5 \text{ cm}^2/\text{s}$ läßt die Bedingung

Advektionsgeschwindigkeiten von knapp 30cm/s zu. Im mehrdimensionalen Fall kann man ähnliche Bedingungen ableiten. Alle Schranken sind nur notwendige Bedingungen für die Stabilität und gelten lokal und ohne Berücksichtigung der Ränder.

In der vertikalen Richtung hat man ebenfalls Schranken zwischen Zeitschritt und Schichtdicke Δz einzuhalten. So ergibt sich in einem einfachen Diffusionsmodell die zu (1.3.3-2) äquivalente Bedingung.

$$(1.3.3-5) \quad \overline{\Delta t} \leq \frac{\Delta z}{2A_v},$$

wobei A_v ein vertikaler Austauschkoeffizient ist, d.h. bei vorgegebenem A_v darf die Schichtdicke nicht zu klein werden.

Werden die nicht-linearen Terme in den Bewegungsgleichungen mit berücksichtigt, so wird die Courant-Friedrichs-Levy-Bedingung bei einer Advektionsgeschwindigkeit \tilde{v}_0 verschärft z.B. zu

$$(1.3.3-6) \quad \frac{\Delta t}{\Delta s} \leq \frac{1}{\sqrt{gH} + |\tilde{v}_0|}$$

(Mesinger und Arakawa, 1976).

1.3.4 Fehlerbetrachtungen

Als Fehlerquellen in einem numerischen Modell werden der Diskretisierungsfehler, die numerische Dissipation bzw. Diffusion und die numerische Dispersion verstanden, die auch häufig als Phasenfehler bezeichnet wird. Über den Diskretisierungsfehler ist schon in §1.3.2 gesprochen worden.

Dissipation/Dämpfung:

Die Ausführungen in A1.3 zeigen, daß das verwendete Differenzschema für Volumentransport- und Scherungsgleichungen nicht dissipativ ist. Weiterhin ergibt sich, daß die numerische Approximation der physikalischen Diffusion A_h die wahre Diffusion unterschreitet (Gl. A1.3-15). Für $2\Delta s$ -Wellen ist das Verhältnis von approximierter zu wahrer Diffusion $(2/\pi)^2 < 1$, obwohl diese Wellen durch das Schema für $A_h \neq 0$ am stärksten gedämpft werden. Die Dämpfung durch die Bodenreibung ist auch im numerischen Fall unabhängig von der Wellenzahl und ist außerdem unabhängig von der Gitterweite Δs . Für quasi-geostrophische Bewegungen ist die physikalische Dämpfung, wie im kontinuierlichen Fall (z.B. Sundström 1977), größer als für Schwerewellen (Faktor 2, siehe Anhang A1.3.)

Die Dämpfungseigenschaften des Lax-Wendrow-Schemas für die Dichteadvektion sind in §1.3.2 diskutiert worden. Das einfachere Schema (A1.3-7) funktioniert nur bei Vorhandensein physikalischer Dichtediffusion; die in Wirklichkeit variable Advektionsgeschwindigkeit u_0 hebt den Dämpfungseffekt wieder auf (Gl. A1.3-16 und -17), so daß eine gewisse von u_0 abhängige Balance erreicht wird. Die Diffusion (physikalisch oder numerisch) führt im Modell zur Zerstörung von Fronten (Simons, 1980).

Dispersion/Phasenfehler:

Dieser Fehler macht sich in der numerischen Verzögerung einzelner Wellenkomponenten bemerkbar. Das Differenzschema (A1.3-4) verzögert, wie die meisten Schemata, die Wellen mit wachsenden Wellenzahlen (siehe Gl. A1.3-10, -11, 12a im Anhang). Wellen mit einer Wellenlänge $2\Delta s'$ (45° -System) können sogar als falsche Trägheitswellen auftreten, wenn sie nicht entsprechend gedämpft werden, wie man den Formeln im Anhang A1.3. entnehmen kann.

Im reibungsbehafteten Medium wird der Verzögerung von Wellenkomponenten dadurch etwas entgegengewirkt, daß die durch physikalisch vorhandene Reibung entstehende natürliche Verzögerung durch die Numerik verringert wird (Gl.A1.3-15).

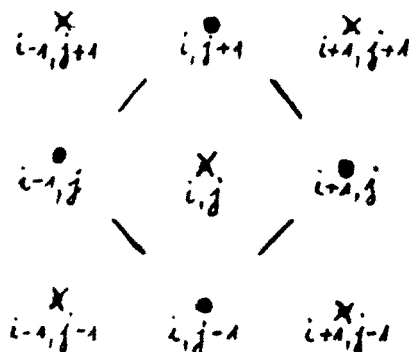
Auch das Lax-Wendrow-Verfahren sowie das vereinfachte Verfahren (A1.3-7) zeigen unangenehme dispersive Eigenschaften, wie man z.B. aus (A1.3-18) sieht.

Der dispersive Charakter der Methoden führt häufig im Modell dazu, daß bei Verwendung von Wärmeleitung Temperaturen auftreten, die größer als die maximal vorgegebene Anfangstemperatur ist, obwohl kein Einstrahlungsmechanismus wirkte (Verstoß gegen den 2. Hauptsatz der Wärmelehre). Dieser Tatbestand wurde von S.Struve (1978) näher untersucht (Auf-treten von Negativ-Konzentrationen) und kann sinnvoll durch sogenannte "anti-flux"-Methoden (Book et.al, 1975) behoben werden.

Gitterdispersion:

Die schon in §1.3.2 erwähnte Gitterdispersion, die darauf beruht, daß U und V-Punkte nicht räumlich gegeneinander versetzt sind, führt dazu, daß die beiden auf dem jeweili-gen Fundamental-Netz quasi-unabhängigen Lösungen sich in der Zeit immer weiter voneinander entfernen.

In einer 20-km Ostsee wurde der Effekt der Gitterdisper-sion näher quantifiziert:



Auf der nebenstehenden Zeichnung sind \times Punkte dargestellt. \bullet -Punkte des einen Netzes sind mit \times , die des anderen mit \bullet bezeichnet.

Als Maß für die Gitterdispersion wird nun die Differenz

$$(1.3.4-1) \quad d_{i,j} = |\zeta_{i,j} - \bar{\zeta}_{i,j}|$$

definiert mit dem Mittel $\bar{\zeta}_{i,j}$ über 4 Nachbarpunkte des anderen Gitters:

$$(1.3.4-2) \quad \bar{\zeta}_{i,j} = \frac{1}{4} (\zeta_{i-1,j} + \zeta_{i,j+1} + \zeta_{i+1,j} + \zeta_{i,j-1}) .$$

Bei Abwesenheit von Gitterdispersion sollte $\zeta_{ij} \approx \bar{\zeta}_{ij}$ sein. Da die Lösungen auf den verschiedenen Netzen sich im Laufe der Integration immer mehr voneinander entfernen, wurde ein räumlich konstanter Südwind mit einem linearen Anstieg auf 10m/s innerhalb von 8 Tagen auf das Modell angewendet. Jeden Tag wurden Karten der d-Werte ausgegeben. Dabei wurde folgendes festgestellt: Die größte Dispersion tritt in Bereichen schlechter räumlicher Auflösung auf, und dort besonders im Küstenbereich. Die Dispersion wächst im Laufe der Zeit an. In Abb. (1.3-3) ist eine Karte von d-Werten dargestellt, wie sie sich nach 8 Tagen einstellt. Es treten maximale Abweichungen d_{\max} von 10cm auf, der mittlere Wert von \bar{d} beträgt 1 cm, die Standardabweichung 1.5cm. Man sieht, daß die stärksten d-Werte im Bereich der Rigaer Bucht und der Aalandsee erreicht werden. Die mittlere Ostsee zeigt die kleinsten Fehler, wenn man vom Küstenbereich absieht, sie betragen höchstens 1cm.

Eine Verfeinerung des Gitters auf 10km scheint angebracht, da die d-Werte als Maß des horizontalen Diskretisierungsfehlers interpretiert werden können.

Bei den Mehrschichtenrechnungen trat in den Schichten mit starker Bodenvariation auch dann unangenehme Dispersion auf.

1.3.5 Die Abbildung der Ostsee auf eine Tangentialebene mit Modelltopographie

Um die Modellierung der Ostsee in einem kartesischen Koordinatensystem behandeln zu können, wurden die Konturen der Ostsee auf eine Tangentialebene projiziert, die im Punkte $\varphi_0 = 60^\circ\text{N}$ und $\lambda_0 = 20^\circ\text{E}$ (Aalandsee) die Erdkugel mit dem Radius R berührt. Die Abbildungsformeln sind im Anhang A1.3 angegeben. Abb. (1.3-4) zeigt die Ostsee auf dieser Ebene zusammen mit dem verwendeten 10km-Gitter. Die maximale Verzerrung in der Lübecker Bucht bzw. bei Leningrad oder Kemi beträgt 1-2km. Die Tangentialebene kann als f -Ebene mit $f = 1.26 \times 10^{-4}$ angesehen werden, wenn man beim Übergang von Kugelkoordinaten zum kartesischen Tangentialebenen-System die Krümmung der Erde und die meridionale Abhängigkeit von f vernachlässigt.

Wie man aus der Abbildungsfunktion erkennt, ist die Tangentialebene mit dem vorgegebenen kartesischen System x, y keine β -Ebene, da die Linien $x = \text{const}$ keine Meridiane darstellen und somit f sowohl von y als auch von x abhängt.

Der Übergang des Systems der hydrodynamischen Gleichungen von Kugelkoordinaten auf das spezielle stereographisch erzeugte kartesische System ist nicht näher untersucht worden.

Die Modellrechnungen sind zwar teilweise mit variablen $f = f(y)$ vorgenommen worden, jedoch spielt die Variation von $\left| \frac{1}{f} \frac{df}{dy} \right|$ im Verhältnis zu $|H_y/H|$ des Bodens eine untergeordnete Rolle (topographischer β -Effekt überwiegt planetarischen, siehe 2.3.1).

1.3.6 Modellrealisierung auf dem Rechner

Aus Seekarten der Ostsee wurden an 5km * 5km-Gitterpunkten der in 1.3.5 beschriebenen Tangentialebene Tiefenwerte abgelesen. Das 2-dimensionale Tiefenfeld wurde dann in beiden Koordinatenrichtungen 3-fach übergreifend mit den Gewichten $1/4$, $1/2$, $1/4$ gemittelt und an 10km * 10km-Gitterpunkten abgetastet. Die Modellküsten sind durch die Tiefe $H=0$ definiert. Die im Modell benutzte Tiefenverteilung der

Ostsee ist in Abb.(1.3-5) dargestellt. Die tiefste Stelle beträgt 233m in der Aalandsee (in Wirklichkeit tiefer).

Die Eigenschaften der Ostseetopographie werden in Verbindung mit Rossbywellen, Wirbeln oder anderen Phänomenen weiter unten behandelt.

Durch die 10-km Abtastung ergeben sich 115 Punkte in Ost-West-Richtung und 131 in Nord-Süd-Richtung, das macht rund 15000 Gitterpunkte, von denen aber nur $1/4$ echte aktive Rechenpunkte sind, der Rest ist Land.

1.4 Die im Modell verwendeten Anfangs- und Randbedingungen

Weiter oben wurde untersucht, welche physikalischen und mathematischen Rand/Anfangsbedingungen nötig sind. Hier wird auf die im Modell verwendeten eingegangen.

1.4.1 Das Initialisierungsproblem

Es wurde gezeigt, daß im barotropen Fall U, V, ζ beliebig zur Zeit $t = t_0$ an allen Gitterpunkten vorgeschrieben werden kann. Im baroklinen Modell können in jeder Schicht u_k, v_k, ϑ_k und ζ zur Zeit $t = 0$ (s.§1.4) vorgegeben werden. Die beliebige Vorgabe $u_k, v_k, \vartheta_k, \zeta$ würde eine schockartige Anregung von Trägheits/Schwerewellen verursachen, die dispersiv ausstrahlen und das Meer an das quasi-geostrophische Gleichgewicht adaptieren (Rossby(1938), Cahn(1945), Bolin (1953), Fjeldstad(1958)). Diese sogenannte "geostrophische Adjustierung" wird im realen Meer außerdem durch die Reibung beeinflusst. In der meteorologischen Wettervorhersage sind eine Reihe von Techniken entwickelt worden (z.B. Haltiner, 1971), die aus dem lückenhaften und unbalanzierten Beobachtungsdaten geostrophisch adjustierte Anfangswerte für die Modellvorhersage konstruieren.

Da es außer einem klimatologischen keinen Datensatz der gesamten Ostsee gibt, der für einen bestimmten Simulationszeitpunkt die hydrographischen Daten T, S wenigstens auf einem groben Gitter synoptisch bereitstellt, kann das zu T, S gehörende Anfangsfeld der Strömung nicht konstruiert werden. Aber selbst wenn es einen solchen Datensatz gäbe, müsste man das Modell zunächst als diagnostisches Modell rechnen lassen, um ein zu T, S passendes Strömungsfeld als Anfangsverteilung zu finden. Dabei würde die Frage der Stärke von Diffusion und Reibung im Modell eine wichtige Rolle spielen. Auf die Verwendung von klimatologischen

T, S-Daten in diagnostischen Modellen wird weiter unten eingegangen (§2.2.1).

Im vorliegenden Modell wurde für die barotropen und baroklinen Rechnungen von einem Gleichgewichtszustand $u=v=\zeta=0$ ausgegangen, so daß nur eine vertikal geschichtete Ostsee zu diesem Strömungsfeld vorgegeben werden konnte, um Adjustierungsrechnungen zu vermeiden.

1.4.2 Randbedingungen in der geschlossenen Ostsee

Als Randbedingungen werden die in §1.1.3 bzw. im Anhang A1.1 aufgeführten Bedingungen verwendet mit den folgenden Vereinfachungen:

Statt der Bedingungen für Temperatur und Salz wird nur eine analoge für die Dichte verwendet. Es wird weder Niederschlag und Verdunstung noch der Wärmefluß an der Meeresoberfläche berücksichtigt. Die durch die Frischwasserzufuhr der Flüsse bewirkte Salz-bzw. Dichteänderung wird ebenfalls unberücksichtigt gelassen. Die Verwendung von "no-slip"-Bedingungen an den horizontalen Rändern erfordert die Verwendung eines horizontalen Austauschkoeffizienten für Impuls, da das mathematische Problem sonst nicht sachgemäß wäre (§1.2.5).

1.4.3 Randbedingungen in der offenen Ostsee

Durch die Belte ist die Ostsee mit dem Kattegatt und der Nordsee verbunden. Die Vorgänge in den Belten werden maßgebend durch Windstau- und Rücklauf-Effekte bestimmt (z.B. Dietrich und Schott(1974)). An den offenen Rändern der Ostsee, also den Belt-Eingängen, werden spezielle Randbedingungen benötigt.

In §1.2.5 wurde erörtert, daß im linearen vertikal integrierten Modell ohne Diffusion entweder der Volumentransport normal zum offenen Rand oder der Wasserstand oder eine charakteristische Kombination von beiden vorgegeben

werden kann. Im nichtlinearen Fall müsste man noch die zum Rand parallele Komponente des Volumentransports bei Einström vorgeben. Obwohl die nicht-linearen Terme in den Belten möglicherweise von Bedeutung sind, können sie schon auf Grund der Modellauflösung (s.unten) nicht berücksichtigt werden. Durch das Vorhandensein von Diffusion wird noch eine weitere Bedingung am Rand benötigt. Diese muß man physikalisch aus der dynamischen Grenzflächen-bzw. "no-slip" oder "free-slip" Bedingung begründen. Sundström (1977) hat Beispiele für sachgemäße Randbedingungen dieses Problems angegeben.

Die Diskretisierung der Randbedingungen ist eng mit dem gewählten Gitter und der vorgegebenen Geometrie verbunden. Der offene Rand wird im Fehmarnbelt und im Öresund wirksam. Die Öffnung am Fehmarnbelt hat im Modell die in nebenstehender Zeichnung dargestellte Form:

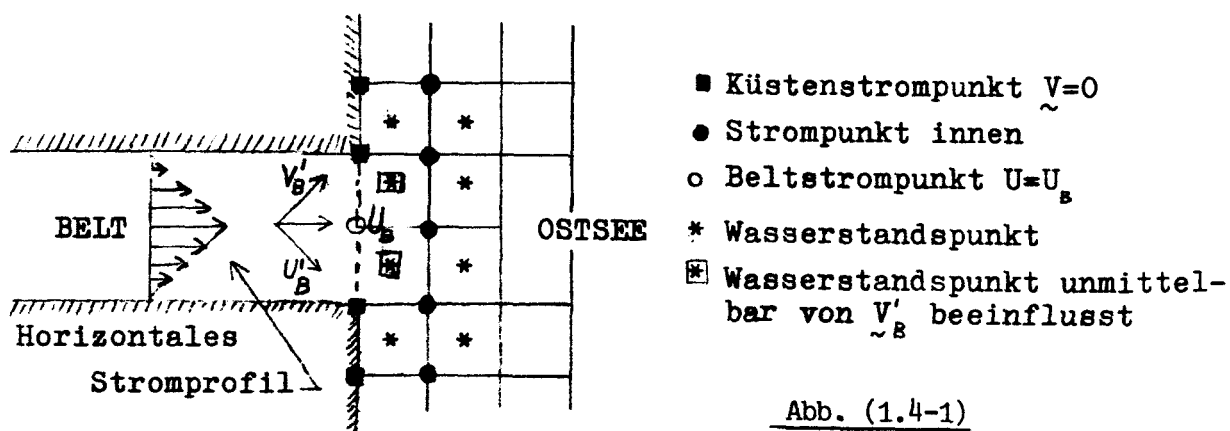


Abb. (1.4-1)

Die Darstellung entspricht etwa der Modellauflösung dieses Gebietes. Der Öresund wird in der gleichen Art abgebildet, jedoch hat der Sund entsprechend eine Nord-Süd-Lage. Zur Vereinfachung wurde angenommen, daß sich Ein- und Ausstrom

des Öresunds synchron mit dem Fehmarnbelt ändert und der Volumentransport einen bestimmten Prozentsatz des Fehmarnbelt-Transports ausmacht.

Es wurden verschiedene Bedingungen im Fehmarnbelt verwendet, die darauf hinauslaufen, den Volumentransport U_B am Belt direkt vorzugeben oder durch Vergleich den Wasserstand des Modells an den des Belts anzupassen. Als zweite Bedingung wird $V_B = 0$ verwendet, d.h. der Ein/Ausstrom erfolgt nur senkrecht zum Rand. $V_B = 0$ kann man auch deuten als Vorgabe von $\partial V / \partial x|_B$ derart, daß $V_B = 0$ zu jedem Zeitpunkt gilt. Da Geometrie und Auflösung der Beltöffnung nur einen inneren Strompunkt zulassen, (der nördlich und südlich benachbarte Strompunkt also Küstenstrompunkt ist, für den die "no-slip" Bedingung gilt) wird implizit das in der Zeichnung skizzierte horizontale Stromprofil verwendet.

Die Vorgabe $V_B = \{U_B, 0\}$ hat noch eine andere wichtige Konsequenz. Da das Modell in 45° -rotierten Koordinaten integriert wird, wird der Volumentransport gleichmäßig auf U'_B und V'_B (s. Zeichnung oben), d.h. auf die beiden benachbarten ζ -Punkte, die ja verschiedenen Netzen angehören (§1.3.4), verteilt. Würde der ζ -Punkt des einen Netzes eine größere/kleinere Wassermenge als der des anderen Netzes erhalten, so würde sich von dieser Region eine derart starke Gitterdispersion ausbreiten, daß die numerische Lösung nicht mehr sinnvoll bleiben könnte.

In dem hier verwendeten Gitter müssen die offenen Ränder jeweils durch eine ungerade Anzahl von V -Punkten und eine gerade Anzahl von ζ -Punkten gebildet werden, um eine gleichmäßige Verteilung der Wassermengen auf beide Netze erreichen zu können.

Bei Windanregung führt die Vorgabe des Volumentransports zu einer Inkonsistenz am Rand, denn der Transport wird gerade vom Wind mitbestimmt. Andererseits würde ein Anstau

von Wassermassen im Skagerak/Kattegat durch Winde über der Nordsee sich im Einstrom bemerkbar machen, ein Sachverhalt, der vom Modell nicht erfasst werden kann.

Kennt man, wie im vorliegenden Fall, durch das Dänische Beltprojekt (z.B.T.Jacobsen, 1976), für die Simulationsrechnungen zu Baltic'75 den Volumentransport durch den Fehmarnbelt, so wirkt die Vorgabe dieser Transporte auf Fluktuationen, die im Inneren des Modells erzeugt werden und die auf Grund von Meßfehlern oder anderen Gründen nicht im Transport enthalten sein können, wie eine Wand mit speziellen Reflexionseigenschaften. Die niederfrequenten Schwankungen des Wasserstands in der Ostsee werden jedoch durch die Vorgabe der Transporte sehr gut approximiert

§ 3.3.1

Die Vorgabe der Transporte erfolgt am Fehmarnbelt über 3 verschiedene Wege:

1. Vorgabe der Transporte durch eine empirische Formel zur Verwendung für idealisierte Rechnungen.

Um auch bei idealisierten Windfeldern über der Ostsee die Möglichkeit zu haben, Ein/Ausstrom durch die Belte zuzulassen, wird der Volumentransport durch den Fehmarnbelt durch die folgende Formel grob approximiert:

$$(1.4.3-1) U_{FEH}(t) = U_0 \frac{4}{\pi} \arctan(b_0 |\tilde{\tau}(t-\lambda)|) \sin(R(t-\lambda) - \varphi)$$

mit U_0 = maximaler bei $b_0 |\tilde{\tau}| = 1$ auftretender Transport, $\tilde{\tau}$ = Windstress westl. Ostsee, b_0 = Konstante, die den maximalen Transport für $|\tilde{\tau}| = 1/b_0$ und die Steilheit des Anstiegs mit $|\tilde{\tau}|$ festlegt, R ist die Richtung des Windes gegen Nord ($R=0$ Südwind!), λ ist die Zeitverschiebung des lokalen Windes zum Ein/Ausstrom ($\lambda = 13$ Std nach Lange, 1975), φ gibt die Richtung an, in der der Wind weder Ein- noch Ausstrom produziert, $\varphi = 20^\circ$ (Dietrich, 1951). Der auch bei Windstille vorhandene Reststrom (Ausstrom) wird

in dieser groben Approximation nicht berücksichtigt. Abb. (3.3-7a/c) zeigt den so berechneten Transport unter Verwendung des im Bornholmbecken gemessenen Windes im Vergleich zu den von Jacobsen (1976) gemessenen Transporten im Großen Belt. Die generelle Tendenz scheint richtig wiedergegeben.

2. Vorgabe der durch Jacobsen (1976) bereitgestellten Volumentransporte des Großen Belts.

Diese Art der Vorgabe des Volumentransports am Fehmarnbelt ergab bei den Simulationsrechnungen die besten Resultate bezüglich der niederfrequenten Wasserstandsschwankungen in der Ostsee.

3. Vorgabe der Wasserstandsschwankungen der Stationen Marienleuchte und Rödby (Fehmarnbelt).

Auf Grund der obigen Erörterung würde das Einsetzen der beobachteten Wasserstände in die durch \boxtimes bezeichneten Punkte (s. Zeichnung oben) zu verschiedenen Transporten in den beiden Netzen führen. Geht man davon aus, daß sich auf Grund der Enge des Belts keine wesentliche Querkomponente V_B entwickeln und die Reibung linear angesetzt werden kann, so erhält man in erster Näherung wegen $V_B \approx 0$

$$(1.4.3-2) \quad U_t + gH \zeta_x + \lambda U = 0 \quad \Big|_{\text{Belt}}$$

Verwendet man bei der Diskretisierung dieser Gleichung für ζ_x den Wasserstandsunterschied zwischen Modell und Beobachtung (z.B. Marienleuchte), so wird sich ein Transport durch den offenen Belt einstellen, bis beide Wasserstände ausgeglichen sind.

Die Zeit, in der der Ausgleich geschieht, hängt vom Verhältnis der charakteristischen Dämpfungszeit $1/\lambda$ zur Periode T der Fluktuationen ab.

Ist λ groß, so stellt sich der Transport momentan auf den Wasserstandsunterschied ein. Weenink (1958) hat in seinem stationären Nordsee-Modell ($\partial/\partial t = 0$) den auf Grund von Windstau-Effekten im Ärmelkanal entstehenden Strom ebenfalls der Wasserstandsdifferenz proportional gesetzt, die entstehen würde, wenn ein imaginärer Damm die Nordsee und den Kanal trennte. Diese Vorstellung ist mit der vorliegenden vergleichbar, in der der Wasserstand im Belt durch Beobachtungen, der Wasserstand in der geschlossenen Ostsee durch das Modell bekannt sind. In den Modellrechnungen wird sich auf Grund von (1.4.3-2) der unterschiedliche Wasserstand bei jedem Zeitschritt versuchen auszugleichen.

In diskreter Form lautet (1.4.3-2)

$$(1.4.3-3) \quad U^{n+1} = (1 - \lambda \cdot \Delta t) U^n - \frac{\Delta t}{\Delta s} gH (\zeta_{\text{Modell}}^{n+1} - \zeta_{\text{Belt}}^{n+1})$$

mit $0 \leq \lambda \leq 1/\Delta t$.

Selbst wenn man relativ große λ , etwa $\lambda \sim f$, annimmt, ist der Faktor $\lambda \cdot \Delta t \sim 2 \cdot 10^{-2}$ sehr klein. Die Modellrechnungen ergeben die beste Approximation des Belttransports außerdem für $\lambda \ll f$ (§3.4.3).

Vernachlässigt man $|\lambda U|$ gegen $|U_t|$ in (1.4.3-2), so erhält man eine Art Ausstrahlungsbedingung

$$(1.4.3-4) \quad U_t + gH \zeta_x = 0 \quad \Big|_{\text{Belt}}$$

die, ähnlich wie in §1.2.5 geschildert, Wellen mit der Phasengeschwindigkeit \sqrt{gH} durch den Rand hindurch wandern lässt.

Eine andere Art der Vorgabe des Transports ist über die geostrophische Beziehung möglich (Wasserstandsdifferenz Rödby-Marienleuchte), die zusammen mit den oben erwähnten Randbedingungen in § 3.3.2 diskutiert wird.

Betreibt man die Modellrechnungen für die homogene Ostsee in einzelnen Schichten, so muß an der Beltöffnung die Stromgeschwindigkeit in jeder Schicht so vorgeschrieben werden, daß der Gesamttransport durch den Belt erhalten bleibt, d.h. man muß die Form des vertikalen Stromprofils vorschreiben. Erlaubt man außerdem vertikale Schichtung, so werden noch der Dichtefluß (bzw. Salz/Temperaturfluß) am offenen Belt benötigt, also z.B. der vertikale Dichtegradient. Aus mathematischen Gründen wird man den Dichtegradienten nur in der Einstromlage vorschreiben dürfen (§1.2.6) und in der Ausstromlage vom Modell extrapolieren.

Wegen der in §1.2.6 beschriebenen Schwierigkeiten der Vorgabe von Randwerten an offenen Rändern eines baroklinen Modells werden in den baroklinen Rechnungen die Ostseeausgänge verschlossen gehalten. Es wäre jedoch möglich, z.B. bei Einstromlagen an der Beltöffnung eine Dichte(Salz)-Quelle vorzugeben und die Ausbreitung des schwereren Wassers zu studieren. Das vorliegende Modell müßte aber für solche Art Rechnungen verändert werden, indem etwa das diffusive Verhalten mit "anti-flux" Korrekturen (s.z.B. Struve, 1978) reduziert wird.

Simulationsrechnungen im baroklinen Modell würden ohne bekannte Schichtungs- und Strömungsverhältnisse an den Beltöffnungen nicht sehr erfolgreich sein. Hier können nur gekoppelte oder fokussierende Modelle, die die Beltsee entsprechend auflösen, zu zufriedenstellenden Ergebnissen führen.

2. Modellrechnungen unter idealisierten Bedingungen

Modellrechnungen unter idealisierten Bedingungen dienen dazu, um aus den komplexen Bewegungsvorgängen eines realen Meeres bestimmte Vorgänge auszusondern bzw. unter vereinfachten Bedingungen zu betrachten. Während analytische Lösungen häufig nur für stark vereinfachte Modelle angegeben werden können, erlauben es numerische Methoden, Lösungen für verschiedene Stufen der Kompliziertheit zu berechnen.

Die Nähe der Modelle zum realen Meer bedeutet aber gleichzeitig, dass die Ergebnisse unübersichtlicher werden und, ähnlich wie bei Beobachtungen auf See, zu einem grossen Angebot von "Meßdaten" führen, deren Interpretation häufig zu neuen Fragen Anlass gibt.

Der Vorteil der numerischen Methoden besteht aber darin, daß das "Experiment" mit veränderten Bedingungen (Parametern) wiederholbar ist, so dass durch vergleichende Betrachtungen verschiedene Einflüsse studiert werden können.

Der im Folgenden verwendete Begriff der "Zirkulation" ist in der Einführung erläutert worden. Die bisherigen Untersuchungen, die sich mit der Zirkulation in der Ostsee beschäftigt haben, sind auf Teilbereiche der Ostsee angewendet (Unsitalo (1960), Kowalik (1969), Kowalik (1972), Sarkisyan et al. (1975), Kowalik & Staśkiewicz (1976), Simons (1978)) oder bei geringerer Auflösung (Jankowski (1978)) betrachtet worden.

Die vorliegende Untersuchung beschäftigt sich mit der gesamten Ostsee bei einer horizontalen Auflösung von 10x10 km.

Die durch den Salzeinstrom in der westlichen Ostsee entstehende Zirkulation ist mit einem zweidimensionalen numerischen Modell von Wilmot (1974) untersucht worden und wird hier nicht näher betrachtet.

2.1. Zirkulation in der ungeschichteten Ostsee

Vom Oktober bis April gibt es in weiten Bereichen der Ostsee kaum thermische Schichtung (z.B. Lenz (1971), Matthäus (1979)), und die oberen Schichten des Wassers sind homogen. Durch das sich von der westlichen Ostsee ausbreitende Wasser der Beltsee mit höherem Salzgehalt erhält man jedoch auch im Winter in der zentralen Ostsee Dichteunterschiede, die das Konzept einer homogenen Ostsee künstlich erscheinen lassen. Um die Bedeutung der Schichtung zu demonstrieren, ist eine solche Idealisierung jedoch erlaubt. Geht es z.B. um die Vorhersage von Wasserständen, so ist die Verwendung eines barotropen Modells - ähnlich wie bei den Sturmflutvorhersagen in der Nordsee - im allgemeinen ausreichend. Doch schon für die Berechnung von klimatologischen Volumentransporten in der Ostsee ist die Schichtung im Zusammenhang mit der Topographie nach Sarkisyan et al. (1975) von entscheidender Bedeutung.

Die Betrachtung von homogenen Modellen bedeutet nicht unbedingt, dass die Modellrechnungen nur in einer Schicht ausgeführt wurden. So sind viele Rechnungen auch für konstante Dichte, aber variable, vertikale Diffusion von Impuls $A_v(z)$ ausgeführt worden. In der Nordsee sind solche verallgemeinerten Ekman-Probleme von z. B. Heaps & Jones (1975) mit Spektralmodellen behandelt worden, deren Funktionensystem aus den Eigenfunktionen des vertikalen

Diffusionsoperators besteht. Die von $A_V^M(z)$ abhängige Vertikalstruktur der Eigenfunktionen zusammen mit den Randbedingungen an Oberfläche (Windstress) und Boden (Bodenstress) bestimmen das Profil der horizontalen Strömungen. Umgekehrt ist die analytische Lösung des verallgemeinerten Ekman-Problems in der Vertikalen von Platzman (1963), Jelesnianski (1967), Nihoul (1977), Kielmann & Kowalik (1980) zur Berechnung der Schubspannung am Boden verwendet worden, so dass die Vorgeschichte von Windstress, Oberflächenneigung und Volumentransport in die Bodenreibung eingeht.

In den vorliegenden Modellrechnungen sind diese relativ aufwendigen Methoden nicht eingearbeitet worden. Die verwendete Bodenreibung und Diffusion werden im folgenden Abschnitt behandelt.

2.1.1. Wahl der Bodenreibung und Diffusion

Schon bei der Vorhersage von Wasserständen auf Grund der atmosphärischen Felder trifft man auf das Problem der Wahl der Bodenreibung, die nicht nur bestimmt, wie schnell z.B. die Eigenschwingungen eines Beckens abklingen, sondern auch, wie gross die Wasserstandsunterschiede an den Beckenenden im quasi-stationären Gleichgewicht sind.

Für die Bodenreibung werden die beiden Bedingungen

$$(2.1.1.-1) \quad \tau_{\sim}^b = \frac{2.5}{H^2} \bar{u} \quad v_{\sim} \quad (\text{quasi-linear})$$

oder

$$(2.1.1.-2) \quad \tau_{\sim}^b = \frac{b}{H^2} |\underline{V}| \underline{V} \quad (\text{quadratisch})$$

verwendet, wobei $\bar{\mu} = \bar{A}_v$ der mittlere vertikale Austausch für Impuls bzw. b eine empirische Konstante ist. Beide Formulierungen werden in Simons (1973) diskutiert. Im Falle, dass in mehreren Schichten gerechnet wird (barotrop oder baroklin), ist H die Dicke und \underline{V} der Transport in der untersten Schicht. Für $\bar{\mu}$ wird in den Grossen Seen (z.B. Platzman, 1963) ungefähr $40 \text{ cm}^2/\text{s}$ und für $b \approx 2.5 \times 10^{-3}$ verwendet.

Eine auffallende Erscheinung in der Ostsee ist das Auftreten von Seiches (Neumann, 1941, Krauß & Magaard, 1962, Wübber & Krauß, 1979), wobei vorwiegend eine Schwingung von 26-28 Stunden-Periode im System Finnischer Meerbusen-Westliche Ostsee angeregt wird. Neumann (1941) hat aus Pegelbeobachtungen die natürlichen Dämpfungsraten λ aus der Amplitudenabnahme der Seiches bestimmt.

Um die Sensitivität der Dämpfung von Seiches bei Änderungen von $\bar{\mu}$ und b im Modell zu prüfen, wurden auf das Modell zwei verschiedene Windfelder gegeben: Plötzlicher Südwind mit $\tau=1$ für $t>0$ bzw. ein Windimpuls $\tau=1$ für $0<t<14$ Stunden. Es wurden die beiden Bodenreibungsformulierungen mit $\bar{\mu}=20, 40, 80$ (cm^2/s) bzw. $b=1.25 \times 10^{-3}, 2.5 \times 10^{-3}, 5 \times 10^{-3}$ angewendet und die logarithmischen Dekremente der Amplitudenabnahme der auftretenden Seiches ermittelt. Durch Betrachtung von mehreren Wasserstandsminima und -maxima wurden 6 Dekremente λ pro Station berechnet, von denen der Mittelwert $\bar{\lambda}$ und die Standardabweichung $\Delta\lambda$ in Tabelle 1 aufgeführt sind. Zum Vergleich sind die aus dem Neumann'schen Beobachtungsmaterial mit derselben Methode ermittelten Werte angegeben.

Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass die Dämpfungsraten in Beobachtung und Modell lokale Unterschiede zeigen. Die Standardabweichungen sind teilweise so hoch, daß man sich nicht eindeutig für einen der aufgeführten $\bar{\mu}$ - bzw. b -Werte entscheiden kann. Das Mittel der betrachteten 5 Stationen zeigt jedoch, daß eine Wahl von $\bar{\mu}$ zwischen 20-40 cm²/s bzw. $b \approx 2.5 \cdot 10^{-3}$ angemessen ist. Wenn nicht anders vermerkt, sind alle 1-Schichten-Rechnungen mit $\bar{\mu} = 40$ cm²/s oder $b = 2.5 \cdot 10^{-3}$ ausgeführt worden. Die für die Ermittlung der Dämpfungsraten nötigen Rechnungen wurden für einen horizontalen Austauschkoeffizienten $A_h^M = 10^6$ cm²/s durchgeführt. Rechnungen mit $A_h^M = 10^5$ bzw. 10^7 cm²/s zeigten keine wesentliche Änderung der Dämpfungsraten. Die Sensitivität von A_h^M wird noch einmal bei den Simulationsrechnungen in 3.3 behandelt.

Schott et al. (1978) haben aus Diffusionsexperimenten während der Expedition BALTIC '75 (Keunecke et al., 1975) horizontale Austauschkoeffizienten A_h unter Modellanpassung an isotrope Vermischungsmodelle berechnet. Der für eine Längenskala von 10 km extrapolierte Wert für A_h^M ergibt sich zu $A_h^M \approx 5 \cdot 10^5$ cm²/s. Im Modell wurde daher für die meisten Rechnungen $A_h^M \approx 10^6$ cm²/s verwendet. Das von Schott et al. (1978) beobachtete Anwachsen von A_h^M in Abhängigkeit von Windstress und Seegang wurde im Modell nicht berücksichtigt. Andere, aus der Turbulenztheorie stammende Methoden der Bestimmung von A_h^M in Abhängigkeit vom Deformationstensor (s.z.B. GARP Publ. Series, No. 8, p. 40 ff), die zur Parametrisierung subskaliger Prozesse dienen, führen im Mittel auf einen Wert A_h^M von derselben Größenordnung wie oben.

Für die vertikalen Austauschkoeffizienten von Impuls wurde

eine vertikalabhängige Verteilung $A_V^M(z)$ vorgegeben: In der vom Wind durchmischten Schicht wurde etwa $A_V^M = 100 \text{ cm}^2/\text{s}$ angesetzt, dann eine Abnahme bis $1 \text{ cm}^2/\text{s}$ in den tieferen Schichten und ein Wert von $1-10 \text{ cm}^2/\text{s}$ in der Bodenschicht. Durch die lokale Topographie kann es natürlich vorkommen, dass die durchmischte Schicht und die Bodenschicht identisch sind. Während einer Rechnung wurde das Vertikalprofil $A_V(z)$ beibehalten. Auch in den baroklinen Rechnungen wurde $A_V(z)$ nicht an Dichte- und Geschwindigkeitsgradienten angepasst.

Auf die Diffusionskoeffizienten für Dichte wird in 2.2. eingegangen.

2.1.2. Wasserstand und Volumentransporte

Eine Reihe von Arbeiten beschäftigt sich mit der Bedeutung der Topographie für die Zirkulation. Für ozeanische Verhältnisse hat z.B. Schulman (1972) eine Zusammenfassung gegeben. Simons (1980) gibt in seinem Buch eine ausführliche Darstellung der meisten Arbeiten und Theorien, die sich mit der topographischen Flachwasserzirkulation in Seen, Rand- und Nebenmeeren beschäftigen.

Da die Ostsee ein aus vielen Becken und Kanälen zusammengesetztes natürliches Meeresgebiet ist, können häufig die in den obigen Arbeiten untersuchten Idealisierungen zur Erklärung der berechneten Zirkulation dienen.

2.1.2.1 Quasi-stationärer Zustand

Bei einem plötzlich einsetzenden Wind entstehen z.B. zwei-

dimensionale Seiches in der Ostsee, die von Wübber & Krauß (1979) eingehend untersucht worden sind. Um die Anregung von Seiches zu unterbinden, wurden die idealisierten Rechnungen für einen linear (auf den Wert $|\tau|=1$) ansteigenden und dann konstanten Windstress durchgeführt. Ist die Anstiegszeit vom Windstress ein ganzzahliges Vielfaches der fundamentalen Seichesperiode, so ist die Unterdrückung von Eigenschwingungen optimal (Rao (1967), Simons (1980)). Wübber & Krauß (1979) geben die Perioden 40.5h und 27.7h ($f=0$) bzw. 31.0h und 26.4h ($f \neq 0$) für die Eigenschwingungen erster und zweiter Ordnung an. Nimmt man Vielfache dieser Perioden, so scheint eine Anstiegszeit des Windstress über etwa 2 - 4 Tage angemessen. Nach den Untersuchungen in 2.1.1 sind die barotropen Seichesschwingungen nach etwa 5-6 Tagen selbst bei optimaler Anregung auf Grund der Reibung abgeklungen.

Abb. (2.1. -1) bzw. (2.1. -2) zeigen die Wasserstandsverteilung in der geschlossenen homogenen Ostsee nach 5 Tagen West- bzw. Südwind, Abb. (2.1. -3) bzw. (2.1. -4) die entsprechenden Volumentransporte. Auffällig ist die Ähnlichkeit der Wasserstandsverteilungen in manchen Gebieten mit den in Abb. (2.1. -5) dargestellten $1/H$ -Linien der Modelltopographie, so z.B. in der Bottensee bei Südwind oder der polnische, lettische und estnische Küstenbereich bei Westwind. Legt man die Volumentransportbilder auf die Wasserstandsverteilungen, so sieht man, dass die Transporte in weiten Bereichen fast parallel zu den Wasserstandslinien verlaufen, wie es im geostrophischen Gleichgewicht der Fall ist. Ebenso die Führung der Transporte entlang der f/H bzw. $1/H$ -Linien in manchen Regionen ist Ausdruck der quasi-geostrophischen Balance. Dies gilt nur approximativ, da Reibung, Windantrieb und Küsten diese Balance verändern.

Für die Transport-Rechnungen wurde das quadratische Bodenreibungsgesetz (2.1.1.-1) verwendet. Vergleichsrechnungen mit dem quasi-linearen Gesetz (2.1.1.-2) mit $\bar{\mu}=40\text{cm}^2/\text{s}$ zeigten keinen wesentlichen Unterschied in den Ergebnissen, d.h. daß die verwendete Bodenreibung einer Ekman-Reibungstiefe von etwa 25 m entspricht, so daß für flachere Gebiete der Ostsee (etwa den Küsten) die Rotation vernachlässigt werden kann und der Ekman-Transport in Richtung des Windes geht. Für tiefere Gebiete dominiert der geostrophische Transport \underline{U}_g gegenüber dem Ekman-Transport $\underline{U}_E \approx \tau/\rho f$. Der Einfluß der horizontalen Reibung bleibt auf eine Gitterbreite an den Küsten beschränkt.

Wie die Abb. (2.1. -3) zeigt, laufen die Transporte bei Westwind parallel zur südschwedischen und polnischen Küste, ebenfalls zur südlichen (schwächeren) und nördlichen (stärkeren) Berandung des Finnischen Meerbusens, zur südlichen und nördlichen Berandung der Älandsee und des Schärenmeeres, und zwar in Richtung des Windes.

Ein Teil des auf die westpolnische Küste konzentrierten Wassers wird an der Stolper Bank entlang über die Stolper Rinne direkt in die Bornholmsee zurückgeführt; ein Teil des Wassers, welches schon durch die Danziger Bucht zirkuliert ist, wird westlich der Kurischen Nehrung im grossen Bogen in die Stolper Rinne zurück in die Bornholmsee gebracht. Ein weiterer Teil des Wassers wird am östlichen Abhang des Gotlandbeckens konzentriert und nach Norden geführt, wobei auf Grund der topographischen Gegebenheiten südwestlich der Insel Oesel starke Mäander auftreten. Es läuft dann teils in einem schmalen Randstrom in den Finnischen Meerbusen und wird teils unter Vereinigung mit dem grossen antizyklonalen

Wirbel in der nord-östlichen Gotlandsee nach Westen geführt. Der Wirbel bildet ein schmales Band, das im Osten den Finnischen Meerbusen ausfüllt und im Norden Einstrom, im Süden Ausstrom verursacht. Im Nordosten des Landsort-Tiefs wird ein weiterer antizyklonaler Wirbel gebildet, der die nordwestliche Gotlandsee ausfüllt.

Die Bottenensee zeigt einen großräumigen zyklonalen Wirbel, dessen Haupttransport nach Norden auf einen 40-km breiten Streifen an der Ostküste beschränkt bleibt. Im Norden der Bottenwiek hat sich im wesentlichen ebenfalls ein zyklonischer Wirbel ausgebildet, allerdings sind auch sehr viel kleinräumigere Strukturen nördlich und südlich der Kvarken zu erkennen.

Weenink (1958), Welander (1968), Kochergin & Klimok (1971) und andere haben gezeigt, dass in einem Becken mit einer Nord-Süd-Topographie $H(y)$ und einem westlichen Windstress das Vorzeichen von $\partial/\partial y(\tau^x/H)$ die Richtung der Zirkulation und das Vorzeichen von $\partial/\partial y(f/H)$ die Küstenseite bestimmt, gegen die die Strömung gepresst wird (Randstrom).

Weenink (1958) hat für seine Nordsee-Modellierung die Drängung der Stromlinien an der Ostküste der Nordsee mit dem obigen Argument interpretiert, wobei die Änderung von f mit y vernachlässigt wurde. Dies kann man rechtfertigen, wenn $\beta/f \ll |H_y|$ ist, mit $\beta = df/dy$.

Betrachtet man in der Bottenensee die über die Ost/West-Ausdehnung gemittelte Tiefe $\bar{H}(y)$, so ist $\bar{H}_y = O(10^{-3})$, also sehr viel grösser als $\beta/f = O(10^{-9})$; ausserdem nimmt $\bar{H}(y)$ nach Norden zu. Letzteres kann somit als Ursache für die Konzen-

tration des Transports an der Ostseite der Bottensee bei West- oder Ostwind angesehen werden. Da die Drängung der Stromlinien im Osten unabhängig vom Windstress ist, müsste ein reiner hydraulischer Transport, wie er etwa bei einer Einstromlage in der Ostsee vorkommen kann, die Transporte ebenfalls im Osten der Bottensee konzentrieren. Abb. (2.1-12) zeigt eine solche Situation, wobei in den Bewegungsgleichungen $\tau = 0$ gesetzt, in den Belten aber ein Transport gemäss Gl. (1.4.3-1) vorgegeben wurde. Bei einer Ausstromlage kehrt sich nur die Richtung des Transports um.

Das obige Argument erklärt auch die Konzentration des nördlichen Transports im östlichen Gotlandbecken. Die unsymmetrische Topographie ist nicht Ausschlag gebend; denn Kanalmodelle, wie das von Krauß (1979), zeigen auch bei unsymmetrischer Topographie keine Konzentration des Transports auf eine bevorzugte Seite (da keine "Nord/Süd"-Topographie vorhanden ist). Nicht-lineare Terme, die hier nicht berücksichtigt wurden, können jedoch solche Asymmetrien erzeugen (Bennet, 1974). Wie weiter unten noch gezeigt wird, reduziert sich jedoch der östliche Transport im Gotlandbecken bei Schichtung.

Löst man das System (1.1.3-8) nach $g\zeta_x$ bzw. $g\zeta_y$ auf, so erhält man nach vorheriger Linearisierung durch Rotationsbildung die Vorticity-Gleichung für die mittlere Geschwindigkeit \bar{u} zu

$$(2.1.2-1) \quad \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} + A_h^M \nabla^2 \eta = -f \nabla \cdot \bar{u} + \left[\nabla \times \left(\frac{\bar{I}^s - \bar{I}^b}{\rho_0 H} \right) \right]_z - \left[\nabla \times \bar{P}_i \right]_z$$

$$\text{mit } \bar{\eta} = \bar{v}_x - \bar{u}_y \quad \text{und} \quad \bar{P}_i = \frac{1}{\rho_0 H} \int_{-H}^{\zeta} v p_i dz, \quad p_i = \int_z^{\zeta} g \rho' dz$$

Der letzte Ausdruck auf der rechten Seite beschreibt die kombinierte Wirkung von Topographie und Schichtung; denn nach Umrechnung erhält man

$$(2.1.2-2) \quad (\nabla \times \tilde{\mathbf{p}}_i)_z = -J \left(\frac{1}{H}, \int_{-H}^{\zeta} p_i dz \right) - \frac{H}{\rho_0} J \left(\frac{1}{H}, p_i \right)_{z=-H}$$

Dieser Ausdruck verschwindet im ungeschichteten oder ebenen Meer identisch.

Der Austauschterm ist ebenfalls approximiert. Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung für den Massentransport folgt

$$(2.1.2-3) \quad -f \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \frac{f}{H} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla H + \frac{f}{H} \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

Im quasi-geostrophischen Fall kann man $\partial \zeta / \partial t \approx 0$ setzen und erhält im homogenen Meer unter Vernachlässigung des Austauschterms die Gleichung (Groen & Groves (1962))

$$(2.1.2-4) \quad \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} = \frac{f}{H} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla H + \left[\nabla \times \frac{\mathbf{\tau}^s \cdot \mathbf{e}_b}{\rho_0 H} \right]_z$$

Aus dieser Gleichung kann man schliessen, daß für einen konstanten Wind, der entlang der Tiefenlinien bläst, der Term $|\tau^s|/VH$ den Antrieb darstellt und daß für Wassertiefen, die-blickt man in Windrichtung - nach rechts hin zunehmen(abnehmen),eine Zirkulation um (gegen) den Uhrzeigersinn resultiert (Simons (1978)).

Dieses Argument wurde oben schon in anderer Form verwendet und erklärt ebenfalls die Zirkulation im Südtteil der Bottensee als auch den grossen Wirbel der nordöstlichen Gotlandsee und des Finnischen Meerbusens, den Wirbel in der nordwestlichen Gotlandsee, die Zirkulation in der nördlichen Bornholmsee usw.

Weht ein Wind entlang der Küste eines Kanals, so resultieren Transporte in Richtung des Windes in den Küstenregionen und ein Gegenstrom in den tieferen Regionen (Bennet (1974)). Simons (1980) weist daraufhin, daß die Variation des Transports quer zum Kanal hauptsächlich von der topographischen Variation bestimmt wird. So erzeugt ein halber Sinus als Bodenprofil eine Transportvariation von etwa eineinhalb Sinus.

Dies wird deutlich in Abb. (2.1-6) und (2.1-7), in denen die Transportvariation quer zu einigen Schnitten aufgetragen ist, z.B. Bornholmsee (Schnitt 4) bei Westwind oder Bottensee (Schnitt 12) bei Südwind.

Die Zirkulation bei Südwind (Abb. 2.1-4) ist sehr verschieden von der bei Westwind. So hat man nördliche Transporte an beiden Küsten der Bottensee und einen stark konzentrierten südlichen Transport entlang des Talweges. Der grosse antizyklonische Wirbel in der nordwestlichen Gotlandsee ist sehr viel schwächer und durch eine nach Süden ausgreifende Zirkulation zwischen Öland und Gotland verschoben. Eine grossräumige zyklonische Zirkulation mit starken topographisch bedingten Mäandern im Nordosten treibt das Wasser an den östlichen Küsten in Richtung des Windes nach

Norden und in den tieferen Regionen zurück nach Süden. Auch bei Südwind findet eine Konzentration der Transporte in der Stolper Rinne nach Westen statt. Die auffällige Schleifen- bzw. Wirbelbildung in der Bornholmsee bei Einmündung in das Bornholmbecken verstärkt sich bei Südwind (ist aber im baroklinen Fall nicht vorhanden). Auffällig ist auch die verstärkte Wirbelbildung in der westlichen Bottensee bei Südwind, die im baroklinen Fall noch deutlicher wird.

Es sind Rechnungen ausgeführt worden, die z.B. in der Bottensee eine konstante Tiefe von 50m oder 100m, in der übrigen Ostsee aber die originale Tiefenverteilung verwendet haben. Die auffälligen Strukturen in der Bottensee verschwinden, wie erwartet, vollständig, während der übrige Bereich der Ostsee kaum einen veränderten quasi-statischen Zustand zeigt.

Die Ergebnisse der Transportberechnungen stimmen im wesentlichen mit denen von Kowalik (1977) und Jankowski (1978) überein, doch werden durch die feinere horizontale Auflösung die Topographie besser erfasst und kleinskalige Strukturen erkannt. Die maximalen Transporte betragen wie bei Jankowski etwa $5 - 10 (10^4 \text{ m}^3/\text{s})$ für einen Windstress $|\tau| = 1$. Messungen von Ambjörn & Gidhagen (1979) in der Ålandsee ergeben Transporte von maximal $20 (10^4 \text{ m}^3/\text{s})$ für einen Windstress von $|\tau| \approx 2$. Die Autoren erhalten nordwärts gerichtete Nettotransporte durch die Ålandsee bei nördlichen Winden, wie sie auch in den Modellrechnungen beobachtet werden. Aus Ambjörn (1978) ergibt sich ein nördlicher Transport auf der Westseite und ein südlicher auf der Ostseite, wie auch in Abb. 2.1-7 zu sehen, wenn das Vorzeichen umgedreht wird.

Die Wasserstandsdifferenz zwischen der Lübecker Bucht im Süden und der Bottenwiek im Norden beträgt 36cm nach 5 Tagen Südwind $|\tau| = 1$, Abb. (2.1-2).

Die Staurelation (z.B. Simons (1980)) für einen Kanal

$$(2.1.2-5) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{3}{2} \frac{\tau^{sy}}{gH} \approx \frac{\Delta \zeta}{L}$$

ergibt für $|\tau^{sy}| = 1$, $\bar{H} = 50\text{km}$, $L = 1300\text{km}$, den vergleichbaren Wert $\Delta \zeta = 39\text{cm}$. Eine genauere Formel liefert etwas kleinere Werte.

Im Fall ohne Rotation ($f=0$) erhält man eine Staurelation, die ebenfalls niedrigere Werte ergibt, wie im nächsten Abschnitt beschrieben wird.

2.1.2.2 Die nicht-rotierende Ostsee ($f=0$)

Im Fall $f = 0$ verlaufen die Linien gleichen Wasserstands fast in Ost-West (Nord-Süd)-Richtung, wenn ein Wind in Nord-Süd (Ost-West)-Richtung bläst. Aus der zweiten Bewegungsgleichung ergibt sich im stationären Fall bei Südwind annähernd

$$(2.1.2-6) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\tau^y}{gH} \approx \frac{\Delta \zeta}{L} \quad ,$$

so daß bei Vorgabe der Werte des vorigen Abschnittes ein $\Delta \zeta$ von 26cm resultiert. Die Modellrechnungen ergeben 24cm.

Während die Linien gleichen Wasserstandes eine relativ einfache Struktur aufweisen, zeigen die zugehörigen Volumentransportbilder eine wiederum aus der Topographie folgende kompliziertere Form, wie sie in Abb. (2.1-8) und (2.1-9)

für West- bzw. Südwind dargestellt ist. Da es kein geostrophisches Gleichgewicht geben kann, folgen die Transporte jedoch nicht mehr unbedingt den Tiefenlinien.

Manche Strukturen, so z. B. der (bei $f=0$ verbreiterte) Küstenstrom in der Bottensee bei Südwind oder die grossen Wirbel in der nordöstlichen und nordwestlichen Gotlandsee bei Westwind, bleiben auch im Fall $f=0$ erhalten, wobei jedoch die Transporte stärker sind.

Im Fall $f \neq 0$ wächst sowohl die horizontale als auch die vertikale Ekman-Schicht an, so dass die Reibungseinflüsse nicht mehr auf den Randbereich beschränkt bleiben. Die Rechnungen mit $f=0$ sind daher solchen mit starker Reibung ähnlich. Die Vernachlässigung von $\partial/\partial t$ gegen f ist nicht mehr ohne weiteres möglich, so dass man f näherungsweise durch die Frequenz der längsten Seichesperiode (knapp 2 Tage) oder durch die Periode der Windanregung (hier ca. 3-5 Tage) ersetzen muss.

Betrachtet man den stationären Zustand gemäss Gleichung (2.1.2-1), so erhält man für $f=0$ die Gleichung

$$(2.1.2-7) \quad \left[\nabla \times \left(\frac{\tau^s - \tau^b}{H} \right) \right]_z = A_h^M \nabla^2 \eta$$

Wegen $\tau^b \sim \underline{V}$ und $\eta = V_x - U_y$ ist dies zusammen mit der Kontinuitätsgleichung ein Differentialgleichungssystem zur Bestimmung von \underline{V} , dessen Lösung für die Ostsee im Fall von West- bzw. Südwind mit den weiter oben aufgeführten Randbedingungen in den Abb. (2.1-8) und (2.1-9) dargestellt ist. Dabei ist die Variabilität von H der maßgebende Faktor für

die Struktur der Transportverteilung, wie aus den Modellrechnungen hervorgeht.

2.1.2.3 Offene Belte

Rechnet man das Modell mit offenen Belten, indem entsprechend (1.4.3-1) die zum betreffenden Wind gehörenden Transporte vorgegeben werden (davon 15% durch den Öresund), und verwendet man für die idealisierten Rechnungen $\lambda = 0$, $b_0 = 0.5$, $v_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ m}^3/\text{s}$, wie es etwa den Beobachtungen entspricht, so erhält man die in Abb. (2.1-10) und (2.1-11) dargestellten Transportverteilungen.

Man sieht, dass sich auf Grund der Einstromlage bei Westwind in manchen Regionen der Ostsee starke Veränderungen ergeben, so etwa in der gesamten Arkonasee, Bornholmgatt, Stolper Rinne, südöstliche Gotlandsee etc. Dieser Unterschied ist in Abb. (2.1-12) dargestellt. Die dortige Volumentransportverteilung erhält man, indem man im Modell nur den Volumentransport in den Belten vorgibt, wie er etwa einem westlichen Wind $|\tau^x| = 1$ über 5 Tage entspricht. Da das Modell linear ist, erhält man Abb. (2.1-10) durch Addition der Transporte von Abb. (2.1-3) und Abb. (2.1-12). Die Stärke des Einstroms ist zwar im Modell willkürlich vorgegeben, doch sind die hier verwendeten Werte mit Beobachtungen vergleichbar, wie in § 1.4.3 dargestellt wurde. Der zum Westwind und der entsprechenden Einstromlage gehörende Wasserstand ist in Abb. (2.1-13) dargestellt und zeigt erwartungsgemäss, daß im Unterschied zur geschlossenen Ostsee, Abb. (2.1-1), die Linien gleichen Wasserstandes der Beltsee und südwestlicher Arkonasee in Ost-West-Richtung statt in Nord-Süd-Richtung verlaufen.

Für südliche Winde hat man Ausstromlagen, die im allgemeinen schwächer sind, deren hydraulischen Effekt durch die offenen Belte aber dieselbe Struktur wie in Abb. (2.1-12) hat, wenn man dort die Transportvektoren umkehrt.

Während z. B. bei Westwind der nach Westen gerichtete Transport in der Stolper Rinne durch die offenen Belte verringert wird, wird bei südlichen Winden der nach Westen gerichtete Transport verstärkt.

Die Verifikation von Transporten in einigen auf Abb. (2.1-12) erkennbaren kritischen Gebieten ist, wie die Rechnungen zeigen, stark von den Vorgängen in den Belten abhängig. Dies gilt entsprechend auch für die Strömungen und Wasserstände in der gesamten Ostsee, wie noch gezeigt wird.

2.1.3 Barotrope Strömungen in der geschlossenen und offenen Ostsee

Abb. (2.1-14) bis (2.1-17) zeigen mittlere Strömungen in 4 Schichten nach 5 Tagen Südwind, wie in 2.1.2 beschrieben. Dabei wurden vertikale Austauschkoeffizienten an den Schichtgrenzen von $A_v = 100 \text{ cm}^2/\text{s}$ zwischen Schicht 2 und Schicht 3 (50-65m) und $A_v = 10 \text{ cm}^2/\text{s}$ zwischen Schicht 3 und Boden verwendet. Die Schichten wurden für den Vergleich mit den baroklinen Rechnungen gewählt, bei denen die stärksten mittleren Dichtegradienten innerhalb der Schicht 3 liegen (Salzgehaltssprungschicht im Bornholmbecken).

Die zu dieser Rechnung gehörigen Transporte sind mit den Modellrechnungen von Abb. (2.1-4) identisch. Schicht 1 (0-15m) - Abb. (2.1-14) - zeigt im wesentlichen mittlere

Strömungen, die gemäss der Ekman-Theorie eine 90° -Ablenkung zur Windrichtung zeigt. In den flacheren Regionen entlang der Küste und auf den Bänken reicht die Ekman-schicht tiefer als der Boden; die Strömung geht entlang den windparallelen Küsten in Richtung des Windes. In vielen Gebieten drückt sich die durch die Topographie bedingte Strömungsstruktur bis in die Oberflächenschicht durch. Die maximalen Geschwindigkeiten betragen 20-25cm/s und treten an den windparallelen Küsten hauptsächlich an der Ostseite auf.

Aus dem Ostsee-Handbuch (Teil I, 2001, S. 101 ff) geht hervor, dass die stärksten Oberflächen-Strömungen in der Botten-see auf der Ostseite auftreten. Dies gilt im wesentlichen für alle Windlagen, wie mittlere Werte des ehemaligen Feuerschiffes "Storkallegrund" zeigen.

Auch an anderen Orten des Bottnischen Meerbusens, an denen Feuerschiffsbeobachtungen vorliegen, stimmt die Richtung der Strömung an der Oberfläche qualitativ überein mit den Modellrechnungen.

Die Geschwindigkeitsverteilung in Schicht 2 (15-50m) - Abb. (2.1-15) - ist, von den flacheren Regionen abgesehen, schon völlig durch die Topographie bestimmt. Die Struktur der mittleren Strömungen zeigt schon den wesentlichen Anteil dieser Schicht an dem Gesamttransport (vergl. Abb. (2.1-4)). Obwohl in dieser Schicht die Strömungen in der Grössenordnung von 10 cm/s liegen, können sie in manchen Regionen (z.B. westliches Bottentief, östliche Bottensee, östliche Küsten der Gotlandsee) bis zu 25cm/s betragen. Schicht 3(50-65) und 4 (65-Boden) - gemäss Abb. (2.1-16) und (2.1-17) - zeigen prinzipiell eine zu Schicht 2 identische Struktur; aller-

dings nehmen die mittleren Geschwindigkeiten auf 5-10 cm/s ab. Die auffällige Wirbelbildung an der Mündung der Stolper Rinne ist in den beiden unteren Schichten besonders deutlich und zeigt, dass der Wirbel topographisch bedingt ist. Die stärksten Scherungen treten gemäss den vorgegebenen Austauschkoeffizienten zwischen Schicht 1 und 2 auf.

Das entsprechende Pendant bei Westwind ist in den Abb. (2.1-18) bis (2.1-21) durch einen Wind von Osten in Richtung 290° ersetzt worden, der gemäss (1.4.3-1) einen maximalen Ausstrom zulässt, da $\phi = 20^{\circ}$ beträgt. Das Westwindbild ist durch Invertierung der Strömungsrichtung zu erhalten. Die Schichteinteilung und Wahl des vertikalen Austausches ist dieselbe wie bei der Südwindlage. Schicht 1 in Abb. (2.1-18) zeigt entsprechend wieder im wesentlichen die bei Ostwind auftretende Ekman-Drift nach Norden. Entlang der deutschen und polnischen Küste ist ein kräftiger Küstenstrom entstanden, der mittlere Geschwindigkeiten im Belt von ca. 40 cm/s und auf der östlichen Stolper Bank von bis zu 30 cm/s produziert. Entsprechend ergeben sich starke Küstenströme auf der Nordseite des Finnischen Meerbusens, der nördlichen Gotlandsee, der südlichen Bottensee usw. Auffällig sind ebenfalls die starken Zellenstrukturen in der nordwestlichen Bornholmsee, der Arkonasee, Stolper Bank, östlichen Gotlandsee etc., die wiederum den starken bis in diese Oberschicht reichenden topographischen Einfluss zeigen.

Der Ausstrom kann nur durch den Fehmarnbelt erfolgen, da der Öresund für diese Modellrechnung geschlossen ist. In dieser Schicht wird er durch den südlichen Küstenstrom gespeist.

In Schicht 2 - Abb. (2.1-19) - wird der Ausstrom an der Darßer Schwelle bereits unterbrochen und muss zu entsprechenden Vertikalgeschwindigkeiten führen. Schicht 3 und 4 in den Abb. (2.1-20) und (2.1-21) haben nur indirekten (durch entsprechende Vertikalbewegung induzierten) Anteil am Ausstrom. Die Struktur der Strömungsverteilung in den unteren Schichten ist wieder vollständig durch die geostrophischen Gegenströme und topographischen Verhältnisse bestimmt. Die stärksten Scherungen treten zwischen Schicht 1 und 2 auf. Doch auch hier gilt, daß die Scherungen bzw. das Stromprofil maßgeblich von der Vorgabe der vertikalen Austauschkoefizienten für Impuls bestimmt werden.

Die Variation der Strömung mit der Zeit ist bisher nicht betrachtet worden. Auf mögliche quasi-geostrophische Wellenvorgänge wird weiter unten eingegangen (§ 2.3). Zur Ergänzung werden in diesem Abschnitt jedoch noch die mittlere Strömung nach 2 Tagen West- bzw. Südwind in Abb. (2.1-22) und (2.1-23) dargestellt, wobei der oben beschriebene linear ansteigende Wind verwendet wurde. Gemäss Bennet (1974) beschleunigt sich das Wasser an den windparallelen Küsten bzw. Beckenrändern anfänglich am stärksten gemäss

$$(2.1-8) \quad U_t = \left(1 - \frac{H}{\bar{H}}\right) \frac{\tau^x}{\rho_0}$$

für einen Kanal mit der mittleren Wassertiefe \bar{H} . Die Modellrechnungen zeigen dieses Verhalten in den Abb. (2.1-22) und (2.1-23) und verdeutlichen die Dominanz der mittleren küsten- und zugleich windparallelen Strömungen. Nach 3 Tagen hat sich jedoch schon eine vergleichbare geostrophische Gegenströmung in den tieferen Schichten ausgebildet.

2.2 Zirkulation in der geschichteten Ostsee

Die Schichtung der Ostsee, bestimmt durch die Temperatur- und Salzgehaltsverteilung, ergibt sich im langjährigen Mittel aus dem Überschuss an Süßwasserzufuhr der Flüsse im Norden und Osten und dem Salzaustausch im Westen durch die Verbindung zum Kattegat. Dies führt im wesentlichen zu einer Zweischichtung von salzarmem Wasser in der oberen und salzreichem Wasser in der Unterschicht, deren Schichtgrenze nach Norden abfällt (z.B. Wüst & Brogmus (1955)). Im Sommer entsteht durch die warme Deckschicht eine Dreischichtung; in tiefen Regionen, wie z. B. Gotland- oder Landsorttief, ergibt sich häufig eine durch die längeren Verweilzeiten bedingte zweite Salzschichtung mit höheren Salzgehalten im Bodenwasser (Fonselius (1970)).

Die säkulare Schichtung und die daraus entstehende thermohaline Zirkulation der Ostsee entstehen aus der Rektifizierung der Salzschübe im Westen bzw. Süßwasserschübe an den nördlichen Küsten. Die Salzschübe im Westen werden maßgeblich durch die meteorologisch bedingten Ein- bzw. Ausstromlagen bedingt.

In den vorliegenden Modellrechnungen sollen weder die auf Grund der Schichtung bestehende Zirkulation der Ostsee, wie sie mit dem diagnostischen Modell von Kowalik & Staśkiewicz (1976) bestimmt worden ist, noch die Salzwasserausbreitung, wie sie von Wilmot (1974) und Welander (1974) studiert worden ist, betrachtet werden. Das beinhaltet, daß die auf Grund der Ein-/Ausstromlagen advektierten, fast vertikal verlaufenden Fronten zwischen den verschiedenere Wassermassen, die man häufig in der westlichen Ostsee beobachtet, nicht modelliert werden.

Vielmehr wird von einer nur vertikal geschichteten Ostsee ausgegangen, deren Schichtung etwa der des Bornholmbeckens entspricht, wie sie zur Zeit des BALTIC '75-Experiments beobachtet wurde. Es sind Rechnungen mit 4 und 10 vertikalen Tiefenniveaus ausgeführt worden. Durch die Vermeidung von horizontalen Dichtegradienten gibt es auch keine Adjustierungsprobleme bei den Anfangswerten.

Um Rechenzeit zu sparen, wurde für die baroklinen Rechnungen ein - statt 3 Tagen nur 2 Tage linear ansteigender, dann 2 Tage konstanter Wind angenommen, durch den ebenfalls die Hauptseiches-Schwingungen einigermaßen unterdrückt werden. Die barotropen Rechnungen wurden zum Vergleich mit demselben Wind berechnet. Entsprechend der in § 1.1.1 geschilderten Approximation wird statt Salzgehalt und Temperatur die Dichte als prognostische Variable verwendet.

2.2.1 Wahl der Reibung, Diffusion und Dichte

Für die Reibung wurden dieselben Parameter wie für die barotropen Rechnungen verwendet mit dem Unterschied, daß in den Gl. (2.1.1-1) und (2.1.1-2) die Grössen H , \tilde{v} aus der untersten Schicht stammen. Da die Dichteverteilung einen starken Einfluss auf das vertikale Geschwindigkeitsprofil hat (z.B. Kowalik (1972), Bennet (1974), Krauß (1976)), kann die Schichtung die Bodenreibung verändern. Dies gilt auch für die vertikale Impulsdiffusion.

Für die horizontale und vertikale Impulsdiffusion wurden ebenfalls ähnliche Verteilungen wie für die barotropen Rechnungen verwendet. Das vertikale Profil von $A_v^M(z)$ für 4-Schichten und 10-Schichten-Rechnungen ist in Abb. (2.2-1)

zusammen mit der Dichteverteilung dargestellt. Da für die baroklinen Rechnungen noch eine Vorhersagegleichung für die Dichte verwendet wird, müssen sowohl horizontale als auch vertikale Diffusionskoeffizienten für die Dichte vorgegeben werden.

Identifiziert man die Dichtediffusion mit der Salzdifffusion, so erhält man Diffusionskoeffizienten, die mindestens 1-2 Grössenordnungen kleiner sind als die Koeffizienten der Impulsdiffusion. Es ergibt sich die horizontale Dichtediffusion A_h^D zu $A_h^D = 10^5 \text{ cm}^2/\text{s}$ für eine Horizontalskala von 10 km (Okubo (1971), Murthy (1975)). Untersuchungen von Simons (1974) im Ontario-See bzw. von Buch & Kullenberg (1980) in der Ostsee zeigen, daß man grössenordnungsmässig für die vertikalen Diffusionskoeffizienten der Temperatur bzw. Salz $5 - 0.5 \text{ cm}^2/\text{s}$ erhält, also etwa 1/100 des Wertes der Impulsdiffusion.*) Die Diffusionskoeffizienten der Temperatur (bzw. hier der Dichte) sind von der Richardson-Zahl abhängig, doch hat die Variation der Koeffizienten, solange die Grössenordnung richtig getroffen wird, nach Simons (1974) keinen allzu grossen Einfluß auf die globale Zirkulation. Für detailierte Simulationsrechnungen ist allerdings die Variation der Koeffizienten von Bedeutung. Die folgenden, idealisierten Rechnungen verwenden für die Dichtediffusion 1/100 der Impulsdiffusion.

Die unterschiedliche Bodenreibung bei den homogenen und baroklinen Mehrschichtenrechnungen ersieht man aus der Anwendung eines linear über 2 Tage ansteigenden, dann 2 Tage konstanten Südwindes auf ein homogenes 1-Schichten- bzw. 4-Schichten- und ein baroklines 4- bzw. 10-Schichten-Modell mit der in Abb. (2.2-1) dargestellten Dichte- und Diffusions-

*) Matthäus (1977) erhält für die Jahresgänge der Wärmediffusion höhere Werte (bis über $100 \text{ cm}^2/\text{s}$).

verteilung. Die Bodenschubspannung in Nord/Süd-Richtung wurde über Ost/West-Schnitte gemittelt gemäss

$$(2.2-1) \quad \bar{\tau}^{by}(y) = 2.5 \cdot 10^{-3} \int_{B_1(y)}^{B_1(y)} |\bar{u}_b| \bar{v}_b dx, \quad ,$$

wobei \bar{u}_b die mittlere Geschwindigkeit in der jeweils untersten Schicht zum Ende des 4. Tages bedeutet. Die geglättete Verteilung von $\bar{\tau}^{by}(y)$ ist in Abb. (2.2-2) dargestellt und zeigt, daß im baroklinen Fall die Bodenreibung stark reduziert wird. Der Mittelwert $\bar{\tau}^{by}$ über alle Punkte der Ostsee beträgt $0.8 \cdot 10^{-2}$ dyn/cm² im 10-Schichten, jedoch $3.6 \cdot 10^{-2}$ dyn/cm² im vertikal integrierten Modell, dh. die "barokline Bodenreibung" beträgt nur ca. 25% der barotropen. Da im 10-Schichtenmodell aber auch die Impulsdiffusion vertikal variabel ist, erkennt man den Effekt der Schichtung auf die Bodenreibung besser am homogenen bzw. baroklinen 4-Schichtenmodell, die jeweils die Werte $\bar{\tau}^{by} = 2.7 \cdot 10^{-2}$ bzw. $1.4 \cdot 10^{-2}$ dyn/cm² liefern, d.h. die Bodenreibung wird bei gleicher Impulsdiffusion durch die Schichtung um ca. 50% reduziert. Der grössere Effekt rührt also von der Schichtung her, wie auch der detaillierte Verlauf von $\bar{\tau}^{by}$ zeigt.

Berechnet man den Mittelwert der Bodenschubspannung nur aus solchen Orten, an denen die maximale Schichtzahl (4 oder 10) erreicht wird, d.h. in den tieferen Regionen, so ergibt sich ein negativer Wert für $\bar{\tau}^{by}$. Dieser ist absolut genommen für den baroklinen 10-Schichten-Fall am grössten und erklärt die Reibungsreduktion durch das unterschiedliche Geschwindigkeitsfeld in den tiefen Regionen der Ostsee.

2.2.2 Wasserstand und Volumentransporte (baroklin)

Die Unterschiede zwischen der quasi-stationären Wasserstandsverteilung im barotropen und baroklinen Fall betragen erwartungsgemäss nur wenige Zentimeter. In der Abb. (2.2-3) bzw. (2.2-4) sind diese Differenzen barotrop-baroklin bei gleicher Windanregung, West- bzw. Südwind, dargestellt. Bildet man Nord/Süd- bzw. Ost/West-Mittel der Differenzen, so fallen diese von positiven zu negativen Werten in Richtung des Windes ab, in Abb. (2.2-3) von ca. 1cm auf -1cm von West nach Ost, in Abb. (2.2-4) von ca. 2cm auf -4cm von Süd nach Nord. Die barokline Rechnung ergibt also zu diesem Zeitpunkt (4 Tage) eine zusätzliche Wasserstandsneigung. Wie schon in 2.2.1 erläutert, hat man im baroklinen Fall durch die Struktur des vertikalen Stromprofils eine reduzierte Bodenreibung und damit eine reduzierte Dämpfung. Diese Tatsache führt einerseits auf einen geringfügig höheren Windstau (ca. 1cm), andererseits sind die "barotropen" Seiches, wenn auch durch die Anregung optimal unterdrückt, etwa um den Faktor 4 weniger gedämpft - Abb. (2.2-2) - und produzieren auf Grund ihrer Amplitude zu diesem Zeitpunkt eine andere Neigung.

Neben dem großräumigen Unterschied in der Neigung gibt es bei Südwind z.B. noch auffällige lokale Unterschiede von 1-3cm, die an der schwedischen Südküste, um Bornholm, an der Ostküste Gotlands etc. auftreten. Da der interne Deformationsradius $R_1 \sim O(10\text{km})$ beträgt, erklären sich diese Unterschiede möglicherweise aus der Anregung von internen Kelvin-, Rand- oder Schelfwellen, können aber auf Grund der räumlichen und zeitlichen Auflösung bei diesen Modellrechnungen nicht weiter analysiert werden.

Die Transporte nach 4 Tagen Westwind im baroklinen 4-Schichtenmodell bzw. Südwind im 10-Schichtenmodell sind in den Abb. (2.2-5) und (2.2-6) dargestellt. Das generelle Bild ist auf den ersten Blick nicht sehr verschieden vom homogenen Fall (Abb. 2.1-3/4). Die Unterschiede sind durch Differenzbildung in den Abb. (2.2-7) und (2.2-8) deutlich gemacht sowie durch die Transporte senkrecht zu ausgewählten Querschnitten, die für den baroklinen Fall in die Abb. (2.1-6) und (2.1-7) des Abschnitts 2.1 als gestrichelte Kurven eingetragen sind.

Lokal können die Abweichungen bis zu ca. $10^5 \text{ m}^3/\text{s}$ betragen, z.B. südwestlich der Kvarken oder am nördlichen Rand des Landsorttiefs. Auffällig ist die häufige Anordnung der Differenztransporte in Wirbelstrukturen. So fehlt in der baroklinen Rechnung bei Südwind der in der barotropen Rechnung am Ausgang der Stolper Rinne deutliche zyklonale Wirbel. Da die verwendete Schichtung in dieser Region der realen sehr nahe kommt, ist zu vermuten, daß in der zentralen Bornholmsee die Schichtung eine dominierende Rolle für die Struktur der Strömungen spielt, wie es auch die Simulationsrechnungen mit einem genesteten Modell von Simons (1976) zeigen. Es werden Wirbel durch die Schichtung evtl. nur abgeschwächt, wie z.B. bei Westwind östlich vom Bornholm - Abb. (2.2-5/7) - oder überhaupt erst produziert, wie bei Südwind über dem Bottentief - Abb. (2.2-6/8) -.

Besonders auffällig sind auch die Wirbelstrukturen in den Differenztransportvektoren in der Gotlandsee östlich von Gotland bei Südwind und nordwestlich von Gotland bei Westwind. Ändert sich der Wind zeitlich, so fangen viele der Wirbelstrukturen an zu wandern, wie noch in 2.3. näher beschrieben wird.

Die Abschwächung oder Verstärkung von Wirbeln im Transport resultiert aus dem Effekt des Terms $(\nabla \times \bar{P}_i)_z$ in der Gleichung (2.1.2-1), der den kombinierten Einfluss von Schichtung und Topographie darstellt. Dieser kann im klimatologischen Mittel doppelt so gross wie der Windeffekt sein (Kowalik & Staśkiewicz (1976)).

Die Terme $(\nabla \times \tau / \rho_o H)_z$ und $(\nabla \times \bar{P}_i)_z$ sind für einige Modellrechnungen ermittelt worden. Für die Transport-Wirbelstärke sind jedoch die Terme $(\nabla \times \tau / \rho_o)_z$ bzw. $(\nabla \times H \bar{P}_i)_z$ zu verwenden. Einige statistische Parameter sind im Anhang A2 in Tabelle 2 zusammengefasst. Daraus geht hervor, daß $(\nabla \times \bar{P}_i)_z$ mehr als halb so gross wie $(\nabla \times \tau / \rho_o H)_z$ ist. Vergleicht man die Werte von $(\nabla \times H \bar{P}_i)_z = O(10^{-6} \text{ cm/s}^2)$ mit dem extremen Wert $(\nabla \times \tau / \rho_o)_z = O(10^{-6} \text{ cm/s}^2)$, so sieht man, dass der kombinierte Einfluss von Schichtung und Topographie in der Ostsee die Separation von baroklinen und barotropen Lösungen nicht immer zulässt (Simons (1976)).

In den Abb. (2.2-9) und (2.2-10) ist die Verteilung des Terms $(\nabla \times H \bar{P}_i)_z$ jeweils für Westwind und Südwind dargestellt. Durch Vergleich mit den Abb. (2.2-7) und (2.2-8) sieht man, dass die Abweichung zu den barotropen Transporten besonders in den Regionen verstärkt wird, in denen $(\nabla \times H \bar{P}_i)_z$ maximal wird.

Blickt man noch einmal auf die Abb. (2.1-7) und (2.1-8) der Sektion 2.1 zurück, so sieht man, dass die küstenparallelen Transporte ebenfalls durch den Einfluss der Schichtung verstärkt (z.B. Westseite der Bottensee) oder geschwächt (z.B. Ostseite der Bottensee) werden können.

Die Differenzen betragen $1 - 2 [10^4 \text{ m}^2/\text{s}]$. Der Effekt der Schichtung in den Modellrechnungen ist in denjenigen Regionen am stärksten, in denen die Salzgehaltssprungschicht die Tiefenlinien schneidet, d.h. in den Gebieten, in denen mindestens die Wassertiefe 50-60 m erreicht, da dies die im Modell vorgegebene Haupt-Sprungschichttiefe ist. Letzteres ist nur für die Bornholmsee richtig, so daß die baroklinen Einflüsse westlich von Bornholm unterschätzt werden und diejenigen in der Bottensee in Wirklichkeit anders aussehen können.

2.2.3 Barokline Strömungen

Nach Bennet (1974) unterscheiden sich in einer Anfangsphase nach dem Zustand der Ruhe die küstenparallelen baroklinen mittleren Strömungen kaum von den barotropen. So wird man im flachen Wasser eine Strömung in Windrichtung, in tieferen Schichten eine gegen Windrichtung erwarten.

Die vorliegenden Modellrechnungen zeigen aber schon nach wenigen Tagen eine wesentliche Änderung in der Struktur der Strömungen, die sowohl durch die Veränderung des vertikalen Strömungsprofils als auch durch den kombinierten Einfluss von Schichtung und Topographie bewirkt wird (s. auch 2.2.2). Alle Rechnungen sind wieder mit einem linear auf $|\tau| = 1$ steigenden Wind berechnet. Abb. (2.2-11) bis (2.2-14) zeigen die Horizontalverteilung der Strömung in einem baroklinen 4-Schichten-Modell bei Westwind, wobei die verwendeten Parameter denen in Abb. (2.2-1) entsprechen; Abb. (2.2-15) bis (2.2-19) zeigen entsprechende Bilder aus dem 10-Schichtenmodell bei Südwind, für die Schichten 5-15, 15-25, 35-45, 55-65, 80-100 und 100m-Boden.

Um die Abweichungen von der barotropen Strömung deutlich zu machen, ist in Abb. (2.2-20) für ein 4-Schichtenmodell bei Südwind der Unterschied barotrop-baroklin in der Schicht 0-15m dargestellt. Obwohl die Strömung dieser Schicht wesentlich durch die Ekman-Dynamik bestimmt wird, sind die Abweichungen zur barotropen Rechnung markant. Zum Boden hin verstärken sich diese Abweichungen noch. So existiert der im barotropen Fall am Ausgang der Stolper Rinne befindliche Wirbel in den baroklinen Rechnungen nicht mehr, wie auch schon die Volumentransporte zeigten. Die Verteilung von $(\nabla \times H \tilde{P}_1)_z$ in Abb. (2.2-10) ergibt an dieser Stelle positive Werte; ebenso ist $(\nabla \times \tilde{P}_1)_z$ als auch $(\nabla \times \tau / \rho_0 H)_z$ positiv, so daß die Anregung für die Wirbelstärke der mittleren Strömung nach Gl. (2.1.2-1) reduziert ist.

Um Einblick in die Vertikalstruktur zu gewinnen, sind an einigen in Abb. (2.1-6) bzw. (2.1-7) definierten Schnitten durch bestimmte Regionen der Ostsee Isotachen gezeichnet worden.

In Abb. (2.2-21a) und (2.2-21b) sind die v- bzw. u-Komponente der Strömung auf dem Schnitt 12 in der Bottensee dargestellt, in Abb. (2.2-22a) die Vertikalgeschwindigkeit. Letzteres Bild hat grosse Ähnlichkeit mit Ergebnissen eines spektralen Kanalmodells von Krauß (1979a, Fig. 7c), das bei fast identischer Anregung, Diffusion und Schichtung gleiche Größenordnungen und Vorzeichen aufweist. Die in Krauß (1979a) auffälligen Signale von am Boden auftretenden Wellen, "bottom trapped", sind auch hier andeutungsweise vorhanden. Hingegen ist der küstenparallele Strom sehr viel stärker an der Küste konzentriert, wie auch die Kanalmodelle von Bennet (1974) und Simons (1980) vorhersagen.

Der Grund liegt darin, daß das Spektralmodell keinen küstenparallelen Druckgradienten zulässt, dessen Existenz in Bennet's (1974) Kanalmodell oder O'Brien's (1975) Auftriebsmodell gefordert wird, und der im vorliegenden Modell ganz natürlich aus der Geschlossenheit des Beckens resultiert.

Der Vergleich einer barotropen/baroklinen 4-Schichtenrechnung in Abb. (2.2-22b) bezüglich der küstenparallelen v-Komponente zeigt, dass auf der Ostseite der Bottensee durch die hier vorgegebene Schichtung der küstennahe Strom an der Oberfläche verstärkt, unterhalb der Sprungschicht vermindert wird. Im symmetrischen Kanalmodell von Bennet (1974) wird dies für beide Küsten vorhergesagt. Das vorliegende Modell ist in der Erfassung der Nordsüd-Geometrie jedoch realistischer als ein Kanalmodell. Die Abweichungen zum barotropen Modell alternieren entlang des Schnittes mit einer Skala von 30-60 km, die den in Abb. (2.2-20) erkennbaren Wirbeln zugeordnet werden können.

Abb. (2.2-23) zeigt die Nordkomponente der Strömung durch Schnitt 6 (südliche Gotlandsee) und Abb. (2.2-24) die Differenz zur barotropen Ostsee. Wieder zeigen die Abweichungen alternierendes Vorzeichen mit einer Skala von 20-40km, zwischen Öland und Gotland sogar um 10km. Die horizontale Strömungsstruktur - Abb. (2.2-15) - (2.2-20) - weist diese Skala wiederum als dominante Wirbelskala auf. Die auffällige Energiekonzentration am Boden, vergl. auch Abb. (2.2-19), weist auf Wellen hin, deren Skala mit der obigen Wirbelskala übereinstimmt.

Um die vom Modell erzeugte quasi-stationäre Strömungsstruktur in der Bornholmsee detaillierter darzustellen, dienen

ein Nord-Süd-Schnitt und ein Ost-West-Schnitt (in Abb. (2.1-7) als Schnitt 4 und Schnitt 4a bezeichnet).

Die Verteilung der Strömungskomponenten u, v, w entlang des Nord-Süd-Schnittes ist in Abb. (2.2-25a) bis (2.2-25c) für Westwind (4 Schichten) und Abb. (2.2-26a) bis (2.2-26c) für Südwind (10 Schichten) als Isotachenbild gezeichnet. Die entsprechenden Ergebnisse auf den Ost-West-Schnitten finden sich in Abb. (2.2-27) und (2.2-28).

Insgesamt sieht die Strömungsstruktur in der Bornholmsee recht kompliziert aus. Zwar erkennt man die bekannten Erscheinungen wie Ekmandrift in den oberen Schichten, (z.B. Abb. (2.2-25b) und (2.2-28a), Gegenstrom in den unteren. Weiterhin erkennt man starke Küstenströmungen verbunden mit Auftriebserscheinungen, die ihr Maximum eine Gitterbreite (10km) entfernt vor der Küste haben und die besonders gross sind, wenn der Wind längs der Küste bläst (vgl. Csanady (1977)). Der in Abb. (2.2-27) und (2.2-28) ausgewählte Schnitt 4a ist fast identisch mit einem Schnitt von Walin (1972), auf dem dieser die Auf- und Abbewegung der Temperatursprungschicht an mehreren aufeinander folgenden Tagen gemessen hat. In Windsituationen, die den vorliegenden entsprechen, erhält man aus seinen Beobachtungen eine Vertikalgeschwindigkeit von $20\text{m}/3\text{Tage} = 7 \cdot 10^{-3} \text{cm/s}$ an der Küste, die mit den Grössenordnungen der Modellrechnungen gut übereinstimmt.

Neben dem lokalen Auftrieb (Abtrieb) an der Küste zeigen sich auch in den inneren Regionen der Bornholmsee Auftriebserscheinungen, die entweder durch die globale Zirkulation großräumig das Becken erfassen, z.B. 10^{-4} - 10^{-5}cm/s in Abb. (2.2-27c),

oder die durch Wirbelbildung oder Konvergenzen und Divergenzen der horizontalen Strömung eng begrenzte Auf/Abtriebszellen darstellen mit einer horizontalen Skala von 30-50km und einer vertikalen von 20-50m. Letztere sind verbunden mit verhältnismässig starken Bodenströmungen, die auch in der Gotlandsee auftreten. Die Vertikalbewegungen (z.B. Abb. (2.2-27c)) erreichen in Bodennähe bis zu 10^{-3} cm/s. Ähnlich wie bei Krauß (1979a) existieren diese Phänomene nur bei Vorhandensein von Schichtung und treten unterhalb der in ca. 50m befindlichen "Salzgehaltssprungschicht" auf.

Die Beobachtungen von BALTIC'75 (§ 3) zeigen die Verstärkung der Strömungen am Boden nicht immer eindeutig. Jedoch ergeben Messungen auf Position 9, in Abb. (2.2-27) bzw. (2.2-28) 75km östlich der Küste gelegen, nach einer fast stationären Windlage (4. - 8.5.1975) Maximalwerte der Strömung in 67 m Tiefe von im Mittel 20cm/s bei nordwestlichem Stress der Stärke $|\tau| \approx 3-4$. In Abb. (2.2-27b), (2.2-27c), (2.2-28a) und (2.2-28b) der Modellrechnungen erhält man für $|\tau| = 1$ Werte von bis zu 6 cm/s am Boden im Bereich der Meßposition 7 und 9. In Abb. (2.2-28a) ist hier die Nordkomponente am Boden doppelt so gross wie an der Oberfläche. Die Messungen auf Position 7 ergeben nicht so eindeutig verstärkte Bodenströmungen, doch treten auch hier die maximalen Strömungen in 55m Tiefe auf (15 cm/s).

Die idealisierten Modellrechnungen können nur prinzipielle Erscheinungen der Strömungsstruktur erkennen lassen. Die Untersuchungen von Simons (1976) zeigen jedoch, daß die Simulationsrechnungen im allgemeinen gerade für länger anhaltende konstante Windlagen erfolgreich sind.

Obwohl die Modellgleichungen hinsichtlich der Dichteerhaltungsgleichung nicht mehr linear sind, kann man bei komplementären Windlagen annähernd komplementäre Strömungen erwarten. Auftriebsgebiete werden zu Abtriebsgebieten und negative Dichteanomalien zu positiven etc.

Ist der Wind zeitlich variabel, so fangen die kleinräumigen Strukturen an zu wandern und können innerhalb weniger Tage eine völlig andere Strömungsstruktur in der Bornholmsee und anderen betrachteten Gebieten der Ostsee erzeugen. Es ist anzunehmen, daß diese Strukturen topographische Wellen darstellen, wie sie auch in den Grossen Seen (Simons (1974)) zu beobachten sind. Diese Frage wird in § 2.3 weiter behandelt.

2.2.4 Dichteanomalien und Auftriebserscheinungen

Im vorigen Abschnitt wurden schon einige Angaben über den vom Modell erzeugten Auftrieb in der Ostsee, insbesondere der Bornholmsee gemacht:

- 1) Küstenauftrieb, Distanz $\leq 10\text{km}$: $w \sim 10^{-2} \text{ cm/s}$
- 2) Kleinräumiger Auftrieb $w \sim 10^{-4} \text{ cm/s}$ bis 10^{-3} cm/s am Boden
- 3) Grossräumiger Auftrieb $w \sim 10^{-5} - 10^{-4} \text{ cm/s}$

Für 1) werden die Modellergebnisse durch Walin's (1972) Messungen in der Bornholmsee unterstützt. Der Küstenauftrieb vor Nordwest-Afrika produziert ähnliche Grössenordnungen (z.B. Hagen (1977)).

Einen Überblick über die horizontale Verteilung von Auf- und Abtriebsgebieten in den oberen Schichten liefert Abb.

(2.2-29), die die Vertikalgeschwindigkeit in 15m Tiefe darstellt (positive Werte sind Auftrieb). Wie zu erwarten ist, tritt der stärkste Auf/Abtrieb an den Küsten auf, die parallel zum Wind verlaufen. Da wieder die quasi-stationäre Südwindlage betrachtet wird, findet man hauptsächlich an den West/Ostküsten starke Vertikalgeschwindigkeiten: Die gesamte schwedische Westküste mit Auftrieb, die Ostküste der Bottenwiek, die polnische, litauische, lettische Küste und die Westseite der Inseln Ösel und Dagö mit Abtrieb. Auffällig sind die Auf- bzw. Abtriebsgebiete auf der Ost- bzw. Westseite der Inseln Bornholm, Öland, Gotland und Ålandsinseln, sowie die Strukturierung in Zellen mit einer horizontalen Ausdehnung von 20-30km. Diese wird an manchen Stellen deutlich durch die topographische Skala verursacht, wie z. B. westlich der Inseln Ösel und Dagö, wo auch die Horizontal-Strömungen stark mäandern (Abb. (2.2-16)). Noch deutlicher wird der Einfluß der Topographie auf die Skala der Zellenstruktur in Abb. (2.2-30), in der die Vertikalgeschwindigkeit in 100m Tiefe für dieselbe Windlage dargestellt ist. Gerade die Gotlandsee ist mit einer sehr rauen Topographie ausgestattet, die der Zirkulation offenbar die entsprechende Skala aufprägt.

Während die in 15m auftretenden Vertikalgeschwindigkeiten an der Küste maximal $6 \cdot 10^{-3}$ cm/s betragen und den Beobachtungen nicht widersprechen, ist es unklar, ob die in 100m auftretenden maximalen Vertikalgeschwindigkeiten von $1-2 \cdot 10^{-3}$ cm/s realistisch sind.

Bei Westwind hat man Auftrieb an den Westküsten, nur ist er nicht so stark wie bei Südwind. Dafür ergeben sich starke Abtriebszellen an der polnischen und estnischen Küste des

Finnischen Meerbusens, sowie Auftriebszellen an der Finnischen Küste. Nördlich der Halbinsel Hela bzw. an der schwedischen Küste der Bornholmsee ist stets mit Abtrieb bzw. Auftrieb bei südwestlichen Winden zu rechnen. Insgesamt ist der Auftrieb bei westlichen/östlichen Winden gleicher Stärke geringer als bei südlich/nördlichen.

Die vertikale Verteilung der Vertikalgeschwindigkeit war an einigen Beispielen in den Abb. (2.2-26c) und (2.2-28c) erörtert worden.

Ein Beispiel für die Struktur der Dichteflächen ist in Abb. (2.2-31a) für den Nord-Süd-Schnitt 4 durch die Bornholmsee bei Südwind dargestellt. Bekanntlich wölben sich die Dichteflächen bei Südwind auf der Westküste bzw. Südküste nach oben und auf der Ostseite bzw. Nordseite nach unten entlang eines schmalen Küstenstreifens, dessen Breite dem internen Rossby-Radius der Deformation entspricht (Csanady & Scott (1974), Simons (1980)). Dieser beträgt hier 0(10km), so daß die Auf- bzw. Abwölbungen in Abb. (2.2-31a) auf den Küstenbereich beschränkt bleiben. Man sieht aber auch, daß durch den in Abb. (2.2-25a) erkennbaren Gegenstrom in etwa 50m Tiefe auf der nördlichen Seite des Beckens die Dichteflächen sich kompensierend nach oben wölben. Die Vertikalverlagerung beträgt für diese Windsituation ca. 5-6m in der "Temperatur-Sprungschicht" und ca. 3-4m in der "Salzgehaltssprungschicht". In der Bottensee erhält man auf dem Schnitt 12 in der Temperatursprungschicht 10-15m Vertikalverlagerung.

Generell ergaben sich aufgrund der in § 1.3 geschilderten Eigenschaften des Integrationsverfahrens der Dichteerhaltungsgleichung häufig lokale Probleme der "Negativkonzentration"

von Dichte (s.a. Simons (1980)). Dies kann dazu führen, daß lokal Dichte derart angereichert oder verloren wird, daß Werte resultieren, die über den maximalen oder unter den minimalen im Becken anfangs vorhandenen Dichten liegen (im 10-Schichtenmodell Werte unterhalb von $\sigma_t=5$ oder oberhalb von $\sigma_t=13$). Dies führt z.B. in Abb. (2.2-31a) zu der erkennbaren Singularität der $\sigma_t=8$ -Linie am südlichen Beckenrand. Das Problem ist lokal, global bleibt die Masse erhalten. Bei Langzeitintegration muss man Verfahren verwenden, die diesen Fehler reduzieren (Lam (1977)).

Da die erzeugten Dichteanomalien besser sichtbar werden, wenn man die Anomalien bezüglich der Anfangsverteilung auf Flächen $z = \text{const}$ betrachtet, sind die Südwind-Anomalien von Schnitt 4 noch einmal in Abb. (2.2-31b) dargestellt, in Abb. (2.2-31c) die entsprechenden Westwind-Anomalien. Zusammen mit den Anomalien in der Gotlandsee (Abb. (2-2-32)) erkennt man, daß sich die Dichteänderungen hauptsächlich dort entwickeln, wo die Sprungschichten den Boden schneiden. Die horizontale Dichteadvektion spielt bei diesen Rechnungen eine untergeordnete Rolle. Bei der 10-Schichtenrechnung kommt die wesentliche Dichteänderung durch vertikale Advektion zustande, da - von einer oberflächen- und bodennahen Schicht abgesehen - die vertikale Dichtediffusion sowie Impulsdiffusion Null gesetzt wurde (Abb. (2.2-1)).

Die horizontale Verteilung der Dichteanomalien ist in den Abb. (2.2-33) und (2.2-34) jeweils über bzw. unter der "Temperatursprungschicht" dargestellt in Form von σ_t -Anomalien in 5-15m bzw. 15-25m Tiefe bei Südwind. Das entsprechende Paar von Abbildungen oberhalb bzw. unterhalb der "Salzgehaltssprungschicht" findet sich in den Abb. (2.2-35) und (2.2-36).

Während die "Temperatursprungschicht"-Anomalien im wesentlichen die Auftriebserscheinungen widerspiegeln, erkennt man an den "Salzgehaltssprungschicht"-Anomalien deutlich die Kompensationsneigung (von Süd nach Nord abfallend) der Grenzfläche, jedoch gilt dies jeweils beckenweise, z.B. Bornholmbecken, Bottensee, Bottenwiek und östliche Hälfte des Finnischen Meerbusens.

Die Schrägstellung der "Salzgehaltssprungschicht" bietet dabei einen möglichen Mechanismus für Überströmungsergebnisse an den Schwellen zwischen den einzelnen Becken.

2.3 Topographische Wellen - Wirbel in der Ostsee

Im den vorigen Abschnitten wurde Wert auf die Modellergebnisse eines quasi-stationären Zustandes gelegt, der durch eine typische, ein paar Tage andauernde Windlage erreicht wird. Auf Grund der räumlichen Skala der Tiefdruckgebiete $O(1000\text{km})$ ist auch ein räumlich konstanter Windstress für diesen Fall angemessen. Die Bedeutung von Frontdurchgängen in einem geschichteten Flachwassermeer ist von Krauß (1978) mittels eines Spektralmodells bei ebenem Meeresboden diskutiert worden. Im folgenden sollen niederfrequente Wellenvorgänge betrachtet werden.

2.3.1 Allgemeines

In einem berandeten Meeresgebiet gibt es bekanntlich Wellentypen, die ihre Existenz der Erdrotation und der Küste verdanken, wie die barotropen und baroklinen Kelvin-Wellen. In idealisierten Becken (z.B. Rechtecken) können sie nur mit langen Wellen vom Typ der Poincaré-Wellen zusammen existieren. Während letztere Perioden haben, die unterhalb der Trägheitsperiode liegen, also in der Ostsee unterhalb von 13 - 14 Stunden, können Kelvin-Wellen auch sehr niedrige Frequenzen haben. Der durch den Rossby-Radius der Deformation beschriebene exponentielle Abfall der Wellenamplitude vor der Küste beträgt ca. $R = 200\text{ km}$ für die homogene und etwa $R_i = 15\text{ km}$ für die barokline Ostsee, so daß die internen Kelvin-Wellen höchstens in einem schmalen Küstenstreifen zur Wirkung kommen. Hat man statt einer vertikalen Wand an der Küste einen geneigten Schelf, so beinhaltet dies zugleich eine variable Bodentopographie. Es werden sowohl hochfrequente Randwellen als auch niederfrequente Schelfwellen ($\omega < f$) möglich. Die Randwellen entsprechen

den ersten 2 Wurzeln der in § 1.2.4 diskutierten kubischen charakteristischen Gleichung, sind also Wellen 1. Art; die Schelfwellen sind der dritten Wurzel der charakteristischen Gleichung zugeordnet, sind daher Wellen 2. Art.

Die Randwellen können auch ohne Erdrotation existieren. Eine Sorte von Randwellen wandert so, daß die Küste links ist, die andere so, daß die Küste rechts ist. Von den letzteren entspricht die Randwelle niedrigster Ordnung bei kleinen Wellenzahlen und Frequenzen ($\omega < f$) der Kelvin-Welle. Sie ist also prinzipiell im quasistationären Zustand enthalten, der in den vorigen beiden Abschnitten diskutiert wurde. Die Kelvin-Welle wird im Übersichtsartikel von Mysak (1980) als "hybrid" bezeichnet, weil ihre Existenz sowohl von der Schwere als auch von der Erdrotation abhängt. Da die Küsten und Bodenveränderungen in der Ostsee eine dem internen Rossby-Radius vergleichbare Skala haben, werden die baroklinen Kelvinwellen durch die Topographie stark modifiziert.

Die Schelfwellen haben Frequenzen $\omega < f$ und wandern auf der Nordhalbkugel so, daß die Küste rechts ist. Betrachtet man diese auf Grund der Bodenneigung und Erdrotation existierenden Wellen 2. Art losgelöst von einer Küstenberandung, so werden diese Wellen auch "topographische" Rossby-Wellen genannt. Sie lassen sich ebenso wie die "planetarischen" Rossby-Wellen aus der quasi-geostrophischen Approximation der Bewegungsgleichungen herleiten. Die planetarischen Rossby-Wellen, die auf Grund der Breitenabhängigkeit des Coriolisparameters existieren, spielen in der Ostsee keine Rolle, da der topographische β -Effekt

$$(2.3.1-1) \quad \beta_T = \frac{f|\nabla H|}{H} \gg \beta = \frac{df}{dy}$$

den planetarischen um 2 Größenordnungen überwiegt, wie man in Abb. (1.3-5) oben links aus der Häufigkeitsverteilung für den Koeffizienten $r = \beta_T/\beta$ entnehmen kann, in der die häufigsten Werte von r zwischen 100 und 300 liegen.

Bei einer idealisierten Nord-Süd-Topographie mit nicht zu starker Neigung α gilt nach Rhines (1970) für die Frequenz freier topographischer Rossby-Wellen bei Vorhandensein von Schichtung

$$(2.3.1-2) \quad \omega = - \frac{\alpha f}{H_0} \frac{\kappa}{k} R_i \operatorname{cth}(R_i k)$$

$$\text{mit } k^2 = \kappa^2 + \eta^2 \text{ und } R_i = \frac{NH_0}{f}, \quad N^2 = \frac{g}{\rho_0} \frac{\Delta \rho}{\Delta z}.$$

Für lange Wellen (d.h. $R_i \ll 2\pi/k$) gilt dann

$$(2.3.1-3) \quad \omega \approx - \frac{\alpha f}{H_0} \frac{\kappa}{k^2}$$

und für kurze (d.h. $R_i \gg 2\pi/k$)

$$(2.3.1-4) \quad \omega \approx - \alpha N \frac{\kappa}{k}$$

Die Schichtung wirkt sich also nur für kurze Wellen auf die Frequenz aus. Die hervorstechende Eigenschaft der Wellen ist, daß sie sich stets so ausbreiten, daß das flache Wasser auf der Nordhalbkugel rechts liegt.

Setzt man $\alpha \sim |VH|$, so kann man mit $r = \beta_T/\beta = \frac{|VH|}{H} f/\beta$ für (2.3.1-2) schreiben

$$(2.3.1-5) \quad \omega = \frac{\kappa}{k} r \beta R_i \operatorname{cth}(R_i k)$$

Setzt man grössenordnungsmässig für Ostseeverhältnisse $R_i = 15 \text{ km}$, $r = 100$ (Abb. 1.3-5) und $\kappa = \eta = 2\pi/50 \text{ km}^{-1}$, so erhält man aus Gl. (2.3.1-5), die natürlich für die Ostsee nur grob angenähert gilt, eine Periode von 6.4 Tagen. Für andere (r, κ, η, R_i) -Werte erhält man ähnliche Perioden von wenigen bis zu mehreren Tagen.

Da die Wellen prinzipiell in geschlossenen Becken existieren müssen, können nur gewisse Eigenfrequenzen und Wellenlängen in Frage kommen. Für das kreisförmige Bornholmbecken hat Wenzel (1978) die Eigenperioden der barotropen topographischen Wellen bestimmt, wobei die niedrigste Ordnung (Wellenzahl 1 in radialer und azimuthaler Richtung) eine Periode von ca. 4 Tagen, die Ordnung (3,3) eine solche von ca. 25 Tagen ergibt.

Die Phasengeschwindigkeiten liegen in der Größenordnung 10cm/s bzw. 10km/Tag. Die vertikale Struktur der freien topographischen Rossby-Wellen zeigt im baroklinen Medium einen exponentiellen Abfall vom Boden zur Oberfläche, der nach Pedlosky (1979) durch die Längenskala d gegeben ist:

$$(2.3.1-6) \quad d = \frac{H}{kR_i}$$

Setzt man $\kappa = \eta = 2\pi/50\text{km}^{-1}$, $H = 50\text{m}$, $R_i = 15\text{km}$, so erhält man $d \approx 20\text{m}$. Für kürzere Wellen erfolgt der exponentielle Anstieg zum Boden hin auf einer kürzeren Skala. Da in den Modellrechnungen das lokale $N(z)$ bis zu $6 \cdot 10^{-2} \text{s}^{-1}$ beträgt, kann man für d einige wenige Meter erhalten, die die Energiekonzentration am Boden hier und in Krauß (1979a) erklären können.

Topographische Wellen können sich als Wirbelstrukturen darstellen, z.B. im Transport. So erhalten Birchfield (1967) und Birchfield & Hickie (1977) in einem kreisförmigen Becken mit Topographie für den barotropen Fall stets ein Wirbelpaar für niederfrequente Windanregung. Ähnliche Strukturen sind in den weiter unten aufgeführten Rechnungen in den einzelnen Becken der Ostsee zu sehen.

Topographische Wellen sind auch in barotropen und baroklinen Modellen des Ostariosees berechnet worden (Simons (1975); Csanady (1976)). Sie zeigen sich dort sowie in den Beobachtungen als eine Zweizellenstruktur mit einem zyklonischen und antizyklonischen Wirbel nach einem heftigen Sturm. Die Strukturen wandern gegen den Uhrzeigersinn um den See und haben eine Periode von 8 Tagen.

Numerische Rechnungen von Simons (1976, 1978) zeigen bei Vorgabe realistischer Windfelder in der Bornholmsee ebenfalls die Erzeugung und Wanderung von Wirbelstrukturen im Volumen-transport.

2.3.2 Beobachtungen von Wirbeln in der Ostsee

Thermistor-Schleppkettenversuche in der Arkona-, Bornholm- und Gotlandsee, die in Kielmann, Krauß & Keunecke (1973) beschrieben sind, zeigen Auf- und Abwölbungen der Isothermen in räumlichen Skalen von ca. 30 - 40 km, die von den genannten Autoren internen Wellen zugeordnet wurden. In Keunecke & Magaard (1975) weisen Schleppkettenmessungen in der Bornholmsee jedoch auf die Existenz von quasi-geostrophischen Wirbeln hin mit einer horizontalen Skala von ca. 30km, einer Periode von ca. 10 Tagen und einer Phasengeschwindigkeit von ca. 5 cm/s.

Strömungsmessungen in der Bornholmsee (Kielmann, Krauß & Keunecke (1973)) zeigen niederfrequente Fluktuationen von einigen Tagen. Messungen aus dem BALTIC'75-Experiment im Bornholmbecken (Kielmann et al. (1976)) zeigen ähnliche Phänomene in Schichtungs- und Strömungsmessungen.

Auf Satellitenphotos im sichtbaren Bereich (LANDSAT I) lassen sich auf Grund der Formation von Algen Wirbelstrukturen an der Oberfläche in der Bornholm- und Gotlandsee erkennen, die eine räumliche Skala von 20-30km haben (Kielmann (1978)).

Abb. (2.3-1) zeigt ein von Hardtke (1980) bereitgestelltes Satellitenphoto der Ostsee im Infrarotbereich. Das Bild wurde aus dem TIROS-N-Datenarchiv des Department of Electrical Engineering & Electronics der Universität von Dundee (Schottland) mit der dortigen Bildwiedergabeanlage erstellt. In seinem wolken- und eisfreien Teil zeigt es die Arkona-, Bornholm- und Gotlandsee bei umlaufenden Winden aus SSE mit ca. 7m/s am 21. 4. 1980, nachdem einen Tag vorher ein Tief nach Norden durchgezogen war.

Deutlich sind (wie auf vielen anderen Photos auch) Wirbel und Fronten an den unterschiedlichen Temperaturen (dunkelgrau= warm) erkennbar, ebenfalls Auftriebsgebiete, z.B. südlich von Gotland.

Besonders deutlich ist das auffällige Wirbelpaar im Bornholmbecken mit einem Wirbeldurchmesser von ca. 35km, oder der Wirbel in der westlichen Arkonasee von gleicher Skala. Im Zentrum der genannten Wirbel befindet sich wärmeres Wasser. Ob das Wasser horizontal eingemischt wurde oder aus tieferen (und salzreicheren) Schichten nach oben advektiert wird, ist unklar. Auf Grund der warmen Wirbelkerne sollte man annehmen, daß beide Wirbel gleichsinnig (zyklonisch?) rotieren, andererseits müssten sich dann relativ starke horizontale Scherungen zwischen ihnen ergeben. Letztere gäben Anlaß für Turbulenzerscheinungen, die auf dem Photo aber nicht zu entdecken sind.

Betrachtet man das Gebiet südöstlich des östlichen Wirbels mit einer Lupe, so kann man sogar noch einen dritten, etwas kleineren (~20km) Wirbel entdecken.

In Modellrechnungen lassen sich nun gerade in der Bornholmsee, in der auf fast jedem Satellitenphoto Wirbel zu erkennen sind, topographische Wellen erzeugen, die eine ähnliche Skala wie die beobachteten Wirbel haben. Das Material der Satellitenphotos lässt bisher leider noch keine Statistik über Wirbelhäufigkeit, Wanderungs- und Drehrichtung oder Zeitskalen zu, so daß nicht immer klar ist, ob die Wirbel als topographische Wellen zu interpretieren sind.

An den Beltausgängen erkennt man auf Satellitenaufnahmen kleinskalige Wirbel (<10km) bei Ein/Ausstromlagen, die Ähnlichkeit mit einer v. Kármán'schen Wirbelstrasse zeigen. Die Wirbelstrukturen in der Ostsee haben manchmal Ähnlichkeit mit quasi-geostrophischer Turbulenz, die auf Grund von nicht-linearer Wechselwirkung entstehen würde.

Da das Modell in den Bewegungsgleichungen linear ist, wird dieser Prozess nicht erfasst. Man kann aber spekulieren, daß bei der Entstehung von quasi-geostrophischer Turbulenz die topographischen Wellen eine entscheidende Rolle spielen.

2.3.3 Erzeugung von Wirbeln im linearen barotropen Modell

Auf Grund der oben erwähnten Beobachtungen und theoretischen Modelle muss es möglich sein, mit einer niederfrequenten Anregung topographische Wirbelstrukturen zu erzeugen. Wenzel (1978) hat in einem idealisierten, geschlossenen Bornholmbecken barotrope, freie und erzwungene topographische Rossby-Wellen für einen räumlich stark inhomogenen und zeitlich variablen Wind untersucht. In den vorliegenden Modellrechnungen treten Wirbel auch für räumlich konstante und zeitlich variable Winde nicht nur in der offenen Bornholmsee, sondern auch in anderen Gebieten der Ostsee auf.

Lässt man den für Abb. (2.2-5) verwendeten linear ansteigenden, dann konstanten Wind wieder linear abnehmen, um möglichst die Anregung von barotropen Seiches zu unterdrücken, so entstehen innerhalb eines Tages Wirbelstrukturen in den Volumentransporten. Dies geht aus Abb. (2.3-2) hervor, in der die Differenz des Volumentransports von zwei aufeinander folgenden Tagen bei abnehmendem Südwind für ein barotropes 4-Schichtenmodell dargestellt ist (die Abnahme erfolgt vom 4. zum 5. Tag). Am auffälligsten sind die Transportwirbel, die nach Abnahme des Windes östlich und nordwestlich der Insel Gotland, am Landsort- und Bottentief entstanden sind. Die Transporte an der Peripherie der Wirbelstrukturen betragen bis zu $4 \cdot [10^4 \text{ m}^3/\text{s}]$. Schwächere Wirbelstrukturen sind aber auch entlang der Stolper Rinne bis hinein in das Bornholmbecken zu entdecken. Die Wirbel ordnen sich häufig in Paaren zu zyklonalen und antizyklonalen Strukturen an, ihre Durchmesser betragen 25-60km.

Will man mit dem vorliegenden Modell die Wanderung der Wirbelstrukturen erfassen, so hat man mehrere Probleme:

- 1) Die Wirbel wandern im allgemeinen weniger als 10 km / Tag
- 2) Da Wirbel sich in ihrer räumlichen Struktur während ihrer Wanderung ändern (z.B. von kreisförmig nach elliptisch), benötigt man viele Zwischenbilder, um sie identifizieren zu können
- 3) Viele der Wirbel sind nur erzwungen und lösen sich sehr schnell auf (innerhalb von Stunden)
- 4) Einige der Wirbel werden durch andere Vorgänge, z.B. Rückströmungen, Seiches etc. maskiert
- 5) Rand und Bodenreibung in Flachwassergebieten zerstören die Wirbel in kurzer Zeit.

In Abb. (2.3-3) sind die Transportvektoren am 7. Tag nach 6 Tagen Südwind (2 Tage auf $|\tau| = 1$ ansteigend, 2 konstant, 2 abfallend) dargestellt. Eingezeichnet sind grosse Pfeile, die die ungefähre Wanderrichtung der dort befindlichen Wirbelstrukturen angeben, wie sie vom 4. Tag an und später, bei Neuentstehung von Wirbelstrukturen, verfolgt wurde.

Falls bei manchen Wirbeln keine Wanderungsrichtung angegeben ist, war ihre Wanderung nicht erkennbar. Auf Grund der beschränkten Modellauflösung konnte nur festgestellt werden, daß die Wanderungsgeschwindigkeit bei allen Strukturen unterhalb von ca. 10 km / Tag lag.

Die Wanderung der Transportwirbel erfolgt so, daß die flache Küste in etwa stets rechts liegt, ähnlich wie die

von Simons (1975) betrachteten topographischen Wellen im Ontariosee, die mit ihren Wirbelzentren gegen den Uhrzeigersinn um das Becken herumwandern ("rotational modes" = Wellen 2. Art).

Da der Mündungspunkt der Stolper Rinne in das Bornholmbecken ein möglicher Entstehungsort für die barotropen Wirbel des Beckens darstellt, dessen niedrigste Eigenfunktion freier topographischer Wellen eine Periode von 4 - 5 Tagen hat, wurde ein periodischer in Nord/Süd-Richtung, räumlich konstanter Wind auf das barotrope 4-Schichtenmodell angewendet und jeweils nur der Ausschnitt des Bornholmbeckens betrachtet.

$$(2.3.2-1) \quad \tau^y = \cos \frac{2\pi}{T} t \quad , \quad T = 96 \text{ Stunden}$$

Bei weiteren Rechnungen wurde der Wind nach einer Zeit T_c (hier 72 Stunden) abgeschaltet und das Strömungsfeld in den einzelnen Schichten verfolgt. Teile der Ergebnisse sind in Kielmann (1978) zusammengefasst.

Abb. (2.3-4a) - (2.3-4d) zeigen die Entwicklung der mittleren Strömung von $t = 54$ bis $t = 72$ Stunden in 0 - 15 m Tiefe, wobei für $t = 72$ der Wind gerade seinen Null-Durchgang hat. $T/2 = 48$ Stunden später erhält man das gleiche Bild wie für $t = 72$, nur sind die Stromvektoren entgegengesetzt gerichtet.

In Abb. (2.3-5a) sind die einzelnen Wirbelzentren auf der Topographie des Bornholmbeckens durch Buchstaben gekenn-

zeichnet (Index a heisst antizyklonisch zur Zeit $t=72$). Schaltet man den Wind bei $t = T_c$ ab, so fangen die zunächst erzwungenen Wirbel an zu wandern. Ihre Wanderungsrichtung ist in (2.3-5a) durch Pfeile gekennzeichnet.

Die Wirbel B und D waren am besten zu verfolgen; ihre sukzessiven Positionen sind mit der entsprechenden Zeitangabe in Abb. (2.3-5b) eingetragen. Daraus ergibt sich eine mittlere Wanderungsgeschwindigkeit von knapp 20km/Tag. Alle Wirbel wandern so, daß die flache Region rechts liegt, wie es für topographische Wellen zu erwarten ist. Die Stromgeschwindigkeit an der Peripherie des Wirbels beträgt 1-3 cm/s ($|\tau| = 1$). Die Durchmesser variieren zwischen 25 und 60 km. Im Laufe von ca. 2 - 3 Tagen bildet sich in der Nähe der Anfangsposition von B wieder ein neuer Wirbel, der entgegengesetzt dreht, dessen Strömung auf Grund der Reibung aber noch weiter abgenommen hat. Der auf der Tiefenlinie 80m wandernde Wirbel mit einer Periode von ca. 4-6 Tagen würde der von Wenzel (1978) berechneten ersten barotropen Eigenfunktion des Bornholmbeckens entsprechen.

Nach einiger Zeit treten auch noch Wellen höherer Ordnung mit kleineren Wellenlängen in Erscheinung. Ihre Stromgeschwindigkeit liegt im Mittel unterhalb von 1 cm/s.

Zur Erläuterung des Bewegungsfeldes im Bereich des Bornholmbeckens vor Abschaltung des Windes ist in Abb. (2.3-5c) die Vertikalkomponente der Wirbelstärke der mittleren Strömung dargestellt. Sie zeigt die Gebiete zyklonaler (weiß) und antizyklonaler Wirbelstärke (schraffiert). Nach einigen Tagen ist das Feld in kleinskaligere Gebiete zerfallen. Die Wasseroberfläche ist für dieselbe Zeit in Abb. (2.3-5d)

abgebildet und zeigt "Hoch- und Tiefdruckgebiete" mit maximalen Werten von 2.5 cm.

In Abb. (2.3-6a) und (2.3-6b) ist die Verteilung der Vertikalgeschwindigkeit in 15m und in 50m Tiefe dargestellt. Abb. (2.3-6a) entspricht den durch die Wirbel verursachten Konvergenzen und Divergenzen der Horizontalströmung der Abb. (2.3-4d). Die Wirbelbildung auf der Mittelbank in Abb. (2.3-4c) erinnert ein wenig an Taylor-Säulen; die Horizontal- als auch Vertikalgeschwindigkeit zeigt in der Schicht 0-40m keine allzu starke Vertikalstruktur.

Abb. (2.3-7a) enthält die Verteilung der Vertikalgeschwindigkeit entlang eines Ost-West-Schnittes, der parallel zur Nordseite der Stolper Rinne verläuft (eingezeichnet in Abb. (2.3-5a). Deutlich tritt die Zellenstruktur mit Auf- und Abtriebsgebieten zwischen den Wirbeln hervor. Maximale Vertikalgeschwindigkeiten findet man in 50m Tiefe. Die vertikale Struktur ist in diesem barotropen Modell zum grossen Teil durch die Verteilung der Impulsdiffusion $A_V^M(z)$ bestimmt. Man erhält bekanntlich sehr viel geringere Vertikalgeschwindigkeiten, wenn Schichtung vorhanden ist.

Die Erzeugung von Wirbelstrukturen im geschichteten Modell wird im nächsten Abschnitt diskutiert.

2.3.4 Erzeugung von Wirbeln im linearen baroklinen Modell

Nach den Betrachtungen in 2.3.2 sollte die Schichtung nur für kurze topographische Wellen Bedeutung haben. Da jedoch in vielen Gebieten der Ostsee (s. § 2.2) barokline und barotrope Bewegungen nicht trennbar sind, sind die in 2.3.2 gemachten Voraussetzungen nicht immer gegeben.

Dennoch zeigt sich, daß, ähnlich wie im barotropen Modell, einzelne Wirbelstrukturen zyklonisch entlang der Tiefenlinien der Becken wandern. So sind in Abb. (2.3-8) die Wanderungsrichtungen durch dicke Pfeile markiert. Die Abbildung stellt im übrigen die Transporte nach 2 Tagen ansteigenden, 2 Tagen konstanten und dann 2 Tage abfallenden Windes dar. Wie schon in § 2.2 erläutert, sind die Wirbelstrukturen in der Bornholmsee gegenüber dem barotropen Modell stark dezimiert. Die Wanderungsgeschwindigkeiten sind nur grob abschätzbar und liegen ebenfalls unterhalb von 10km/Tag.

Zum Vergleich mit den barotropen Rechnungen wurde auf ein baroklines 4-Schichtenmodell der in 2.3.3 beschriebene Wind gegeben.

Abb. (2.3-9a) zeigt wieder die Horizontalgeschwindigkeit in 0-15m Tiefe bei Nulldurchgang der Windstärke und ist mit Abb. (2.3-4d) zu vergleichen. Die Geschwindigkeit in 15-50m und 50-65m ist in Abb. (2.3-9b) und (2.3-9c) dargestellt. Generell sind die Wirbel gegenüber dem barotropen Modell stark abgeschwächt. Dies liegt am kombinierten Einfluß von Schichtung und Topographie, der gemäss dem Term $(\nabla \times \vec{P}_i)_z$ für das betrachtete Gebiet zur Verminderung der Wirbelstärke beiträgt (s. § 2.2). Am stärksten haben sich die Wirbel A, B, D, G (s. Abb. (2.3-5a)) verändert. B ist aber dennoch vorhanden und tritt, wenn auch schwächer, in 15-35m Tiefe deutlicher hervor, Abb. (2.3-9b).

Der Unterschied zwischen barotroper und barokliner Rechnung ist besonders bezüglich des Vertikalprofils der Horizontalgeschwindigkeit ersichtlich (s.a. § 2.2).

Die Geschwindigkeiten nehmen zum Boden hin zu ("bottom trapped"). Abb. (2.3-9d) zeigt den Unterschied barotrop-baroklin in 50-65m Tiefe, aus der z.B. ersichtlich wird, daß die starke Veränderung von Wirbel F mit den andersartigen Bodenströmungen zusammenhängt. Diese spielen nach Simons (1976) für die Simulationsrechnungen eine entscheidende Rolle.

Weiterhin sind in Abb. (2.3-6c) und (2.3-6d) die Horizontalverteilungen der Vertikalgeschwindigkeit für das barokline Modell zum Vergleich mit den darüber gezeichneten des barotropen Modells dargestellt. Die Zellenstrukturen zeigen eine gewisse Ähnlichkeit mit den barotropen, jedoch ist die Vertikalgeschwindigkeit stark reduziert, und die Auf- und Abtriebsgebiete sind verschoben. Dies wird auch entlang der Stolper Rinne am Schnitt in Abb. (2.3-7b) deutlich.

Auffällig ist die Verteilung der Dichteanomalie in 57m Tiefe entlang der Stolper Rinne, Abb. (2.3-7c). Sie zeigt die stärksten Änderungen im Bereich der Stolper Schwelle. Es ist anzunehmen, daß durch die intensive Wirbelbildung auf der Mittelbank und an der Stolper Rinne Vermischungsprozesse stattfinden, die den Wasseraustausch zwischen Gotland- und Bornholmbecken bewerkstelligen.

Bei Abschaltung des Windes fangen die Wirbel wieder an zu wandern (flaches Wasser rechts). Eine längere Verfolgung mit dem baroklinen Modell wurde unterlassen, weil die betrachteten Wirbelstrukturen Wellenlängen haben, die einige Vielfache des internen Rossby-Radius betragen, und somit die Frequenz nach Gl. (2.3.2-3) von der Schichtung nicht mehr stark beeinflusst wird. Auf der anderen Seite müsste das Modell für die Betrachtung von kürzeren, baroklinen

Wellen hochauflösender sein; denn der jetzt verwendete 10km-Gitterabstand entspricht gerade dem internen Rossby Deformationsradius.

Zur separaten Betrachtung der topographischen Wellen in der Ostsee könnte ein aus der quasi-geostrophischen Approximation abgeleitetes Modell dienen (z.B. Holland (1978)), das die störenden Schwerewellen nicht mehr enthält. Man muss jedoch annehmen, daß auf Grund der relativ hohen Froude-Zahl in der Ostsee (s. § 1.1.2) der Einfluss der Schwere auf die topographischen Wellen nicht zu vernachlässigen ist.

3. Simulationsrechnungen im Zusammenhang mit Meßprogramm BALTIC'75

Um festzustellen, wie realistisch numerische Modelle Bewegungsvorgänge im Meer darstellen können, kann man versuchen, in der Natur beobachtete Vorgänge mittels des Modells nachzuahmen. Dies lässt dann eventuell Rückschlüsse darauf zu, in welcher Hinsicht die Modelle verbessert werden können. Die Verbesserungen können sowohl auf die mathematische als auch physikalische Formulierung abzielen.

Bei einer genügenden Anzahl von freien Parametern kann für ein bestimmtes Experiment eine beliebig gute Modellanpassung erreicht werden ("Abstimmung" des Modells). Für ein anderes Experiment müsste der Parametersatz evtl. anders gewählt werden. Man ist daher bestrebt, die Anzahl der Modellparameter möglichst klein zu halten und mit Hilfe von Sensitivitätsanalysen oder unabhängigen Methoden die Parameterbereiche einzugrenzen.

Was im Detail unter Simulation verstanden wird, hängt von der Problemstellung ab. So können die grossen Ozeanmodelle zur Zeit die beobachteten Golfstromtransporte sowie die Temperatur- und Salzgehaltsverteilungen des Weltozeans nicht befriedigend simulieren (Pond & Bryan (1976)), d.h. relativ globale und klimatologische Probleme, während man versucht, auf den Schelfen, Randmeeren, Flüssen und Seen Vorgänge wie Auftrieb, Vermischung, Verschmutzung, Strömung, Sturmfluten lokal zu simulieren. Für diese Regionen ist man auf Grund des besseren Beobachtungsmaterials und der unterschiedlichen Fragestellung häufig erfolgreich gewesen,

wie diverse Arbeiten zeigen (s. z.B. Zitate in den Büchern von Nihoul (ed.) (1980); Ramming & Kowalik (1980); Simons (1980)).

Viele Prozesse können nur im statistischen Sinne simuliert werden, da die meteorologischen Antriebsfelder stochastischer Natur sind, und einzelne Realisierungen des Prozesses nicht vorhersagbar sind (z.B. Willebrand et al. (1980)). Bei den Vergleichen beschränkt man sich nicht nur auf die Güte des Zusammenhangs von Modell und Messung allein. Vielmehr prüft man, ob ein innerhalb der Beobachtung gegebener Zusammenhang auch vom Modell zufriedenstellend simuliert werden kann.

Im Zusammenhang mit dem Meßprogramm BAL TIC '75 hat Simons (1978) versucht, barotrope und barokline Strömungen in der Bornholmsee mittels eines genesteten Modells zu verifizieren. Dies ist teilweise, aber nicht gänzlich zufriedenstellend gelungen. Hierzu werden einige zusätzliche Untersuchungen mit dem vorliegenden Modell an Hand von längerfristigen barotropen Simulationsrechnungen diskutiert.

3. 1 Methoden der Modellverifizierung

Um die mit dem Modell erzeugten Ergebnisse mit Beobachtungen zu vergleichen, gibt es verschiedene Möglichkeiten, die kurz aufgeführt werden sollen:

3.1.1 Vergleich von Einzelphänomenen

Bei dieser Methode vergleicht man für gewisse Ereignisse, z.B. eine Sturmflut, die entsprechenden Variablen wie Wasserstand, Strömung etc. zusammen mit den entsprechenden Beob-

achtungen auf Schaubildern. Man diskutiert die visuellen Unterschiede, z.B. Eintritt des Maximums im Wasserstand, Stromumkehr etc. So hat z. B. Simons (1976) geglättete Stromvektoren in verschiedenen Tiefen für eine bestimmte Windphase mit den in BAL TIC '75 beobachteten verglichen und verschiedene Gründe für die Unterschiede erörtert.

3.1.2 Statistische Vergleiche in Zeit und Raum

Statt Einzelphänomene zu vergleichen, kann man aus Modell-
daten sowie Beobachtungen Häufigkeitsverteilungen, Mittel-
werte, Kovarianzen oder andere geeignete Parameter, z.B.
Geschicklichkeitskoeffizienten berechnen und vergleichen.

Eine detaillierte Darstellung von methodischen Problemen
bei dem Vergleich zwischen Modell und Beobachtung findet
man in Davis (1976). Dort, wie auch in Hsueh & Lee (1978),
werden "Geschicklichkeitskoeffizienten" definiert, die
von der folgenden Form sind:

$$(3.1.2-1) \quad s = 1 - \frac{\langle (U_{\text{gem}} - U_{\text{ber}})^2 \rangle}{\langle U_{\text{gem}}^2 \rangle}$$

wobei $\langle \rangle$ Erwartungswerte, U_{gem} z.B. eine gemessene und
 U_{ber} eine berechnete Strömungskomponente bedeuten. $s = 1$
heisst perfekte Simulation. Man kann s für alle Meßpunkte
oder für spezielle Teilmengen betrachten. Sind alle Meß-
punkte unabhängig und normal verteilt, so ist s eine ver-
nünftige Vergleichsgrösse. Sind die Daten nicht unabhängig,
was meistens der Fall ist, z.B. auf Grund von Wellenphänomenen,
so geht man zu einer spektralen Betrachtungsweise über.

3.1.3 Statistische Vergleiche im Fourierraum

Da im Meer fast jede Registrierung der Strömung, Temperatur etc. Wellenvorgänge enthält und daher die Daten in zeitlicher und räumlicher Folge nicht mehr unabhängig sein können, verwendet man statistische Methoden der Spektralanalyse für die Modellverifizierung. Man kann dann erkennen, in welchen Frequenzen- bzw. Wellenzahlbereichen eine Modellierung zufriedenstellend funktioniert oder nicht. Anwendungsbeispiele findet man bei Hsueh & Lee (1978) sowie bei Willebrand et al. (1980). Um diesen Vergleich ausführen zu können, muss man genügend viele Daten (sowohl vom Modell als auch gemessene) zur Verfügung haben, d.h. das Modell muss für längere Zeit laufen.

3.1.4 Typische Simulationsrechnungen

Mit dem vorliegenden Modell wurden für einen Zeitraum von knapp zwei Monaten (1. April bis 26. Mai 1975), für die Liebing (1976) auf Grund der Analysen des Deutschen Wetterdienstes den Bodenluftdruck über der Ostsee auf einem 190km-Gitter bereitgestellt hat, Zeitreihen von Wasserständen und vertikal gemittelten Strömungen an den vorhandenen Meßpunkten erzeugt. Diese wurden dann im Sinne der oben angegebenen Methoden mit den Beobachtungen verglichen. So wurde z. B. die Phasenbeziehung zwischen den Pegelregistrierungen Gedser und Ystad mittels Spektralanalyse für Modell und Beobachtung verglichen etc.

Die einzelnen Rechnungen unterscheiden sich durch die verschiedene Wahl von Parametern und Randbedingungen an den Belten. Sie werden weiter unten diskutiert.

Da die Strommesserketten nicht genau auf den Gitterpunkten des Modells lagen, wurden die Modelldaten auf die entsprechenden Meßpositionen interpoliert.

Die barotropen Vorhersagen (eigentlich "Nachhersagen") über 2 Monate haben einen erheblichen Teil an Rechenzeit gekostet. Auf der Rechenanlage DEC-10/KL 1091 der Universität Kiel dauerte eine barotrope Vorhersage von 2 Monaten 4-6 Stunden. Barokline Rechnungen über 2 Monate hätten erheblich mehr Zeit gekostet.

Es ist jedoch zweifelhaft, ob solche baroklinen Rechnungen mit dem vorliegenden Modell physikalisch sinnvoll gewesen wären:

- 1) Es hätte zunächst eine an die klimatologischen Dichtedaten der Ostsee angepasste Zirkulation berechnet werden müssen, die dann durch die aktuellen Dichteformationen von BALTIC'75-Zeit aktualisiert worden wäre (s. Initiatisierungsproblem § 1.4.1). Dies hätte man mit einem diagnostisch-numerischen Modell erreichen können; die Ergebnisse wären aber auch wieder von nicht genau bekannten Parametrisierungen abhängig (Austausch von Impuls, Salz etc.).
- 2) Selbst bei einer halbwegs richtig auf die klimatologischen Dichtedaten angepassten Zirkulation hätte man das Problem, daß langperiodische Phänomene wie topographische Wellen oder Wirbel, die in das Simulationsgebiet einwandern, nicht richtig erfassbar sind, solange nicht eine Aktualisierung auch ausserhalb des Gebietes möglich ist. Um eine brauchbare statistische Aussage zu bekommen, hätte man Simulationsrechnungen über mehrere Monate machen müssen.

- 3) Fronten und Sprungschichten wären durch die unvermeidbare Diffusivität des Modells zu schnell zerstört worden.
- 4) Bei Zeitskalen von Monaten wären die Einarbeitung von Verdunstung, Süßwasserzufuhr, Wärmefluss an der Meeresoberfläche und die Kenntnis der aktuellen Salzeinschübe und Vermischungsprozesse in der Beltsee nötig gewesen, die wiederum von dem globalen Geschehen über Nord- und Ostsee zusammen bestimmt wären.
- 5) Die Antriebsfunktionen, dh. Wind bzw. Schubspannung, sind trotz der für das Meßprogramm BALTIC'75 einmalig guten Abdeckung der meteorologischen Komponente zu ungenau bestimmt (s. 3.2.3).

3.2 Beobachtungsdaten des Experiments BALTIC'75

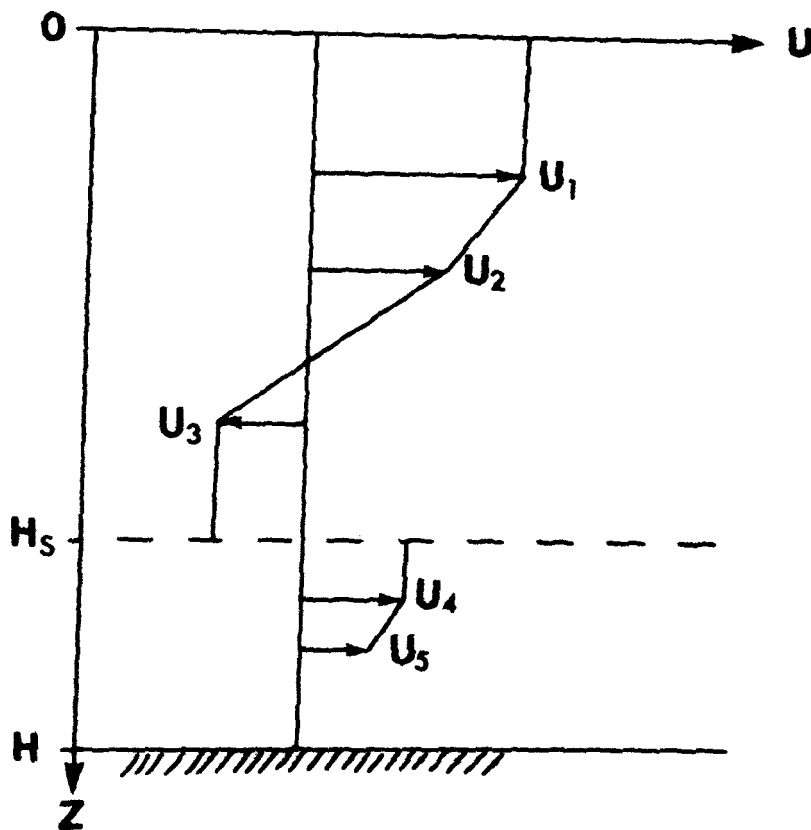
3.2.1 Beobachtungsmaterial

Die Zahl der zur Verfügung stehenden Pegelregistrierungen ersieht man aus Abb. (1.3-3) des ersten Kapitels. Für eine grosse Anzahl von Pegelstationen standen 1-stündige Werte für die Monate April - Mai zur Verfügung.

Die Positionen der verankerten Strommesser- und Temperatur-Meßketten im Bornholmbecken sind in Abb. (3.2-1) zu ersehen. Die Auflösung in der Vertikalen sowie die Qualität der Daten insgesamt ist sehr unterschiedlich. An einigen Positionen wurden direkte Windmessungen auf Bojen durchgeführt. Eine Reihe von Temperatur- und Salzgehaltsprofilen zwischen den Verankerungsketten gab Aufschluss über die Schichtungsverhältnisse. Die Strommessungen fanden hauptsächlich von Mitte April bis Mitte Mai 1975 statt. Detaillierte Darstellungen des Beobachtungsmaterials findet man in Keunecke et al. (1975) und Kielmann et al. (1976).

3.2.2 Berechnung von vertikal gemittelten Strömungen

Um für die barotropen Simulationsrechnungen auch Strömungen vergleichen zu können, wurden aus den BALTIC'75-Strommessungen mittlere Strömungen für die Verankerungspositionen im Bornholmbecken berechnet. Dies geschah entsprechend der folgenden Abbildung (3.2-2)



(Abb. 3.2-2)

in der das Stromprofil bei $z = 0$ durch u_1 , bei $z = H_s$ (Sprungschicht) durch u_3 oberhalb und u_4 unterhalb von H_s und bei $z = H$ (Boden) durch u_5 ergänzt wird. Die gemittelte Geschwindigkeit ergibt sich aus dem Integral dieses Profils.

Es ist klar, daß die gemittelte Geschwindigkeit stark von der richtigen Festlegung des Profils abhängt. Messungen mit der Profilsonde (Kuhn (1980)) zeigen, daß die Wahrscheinlichkeit einer falschen Abtastung des Geschwin-

digkeitsprofils mittels fest verankerter Geräte gross ist. Andererseits beinhaltet die Mittelung auch eine gewisse Glättung. So werden die in den Strommessungen enthaltenen Trägheitsoszillationen durch Vertikalintegration für ein geschlossenes Becken eliminiert (Krauß (1979b)).

3.2.3 Untersuchung der meteorologischen Daten

Wind- und Luftdruckdaten werden vom Modell bei jedem Zeitschnitt $\Delta t = 3$ min an jedem Gitterpunkt des Modells benötigt. Die Bodenluftdruckdaten wurden von Liebing (1976) auf einem 190km-Gitter ($\Delta t = 6$ Stunden) bereitgestellt. Untersuchungen von Messungen der Profilmessanlage und der Küstenstationen zur geostrophischen Berechnung des Windes wurden von Behrendt (1976) ausgeführt.

Das spektrale Verhalten der vom Deutschen Wetterdienst gelieferten Druckdaten wurde bisher nicht beachtet. Ebenfalls wurden der auf den Bojen (I, IV, V, 6A: s. Abb. (3.2-1)) gemessene Wind nicht zum Vergleich herangezogen.

Letztere werden in folgendem aber gerade für die spektrale Analyse des geostrophisch berechneten Windes verwendet. Aus den Messungen im Bornholmbecken wurde eine 42 Tage lange Windmeßreihe durch Mittelungsprozesse der oben aufgeführten Einzelmessreihen konstruiert. Die Druckdaten wurden zeitlich linear und räumlich, wie bei Liebing (1976), durch bikubische Interpolation auf das 10-km Gitter des Modells interpoliert. Der an der Meßposition 9 geostrophisch berechnete Wind ist in Abb. (3.2-3a) und (3.2-3b) - gestrichelt - zusammen mit dem oben erwähnten, aus direkten Messungen

konstruierten Wind - ausgezogen - dargestellt, in Abb. (3.2-3c) der Luftdruck - gestrichelt - zusammen mit dem auf Christiansö beobachteten.

Aus den Spektren des geostrophischen Windes und des wahren Windes erhält man für Zeitskalen oberhalb eines Periodenbereichs von 2 Tagen die Beziehung

$$(3.2.3-1) \quad |\tilde{u}| = a |\tilde{u}_g| \quad \text{mit } a = 0.51 \pm 0.04$$

und den Ablenkwinkel $\alpha = \angle(\tilde{u}_g, \tilde{u})$

$$(3.2.3-2) \quad \bar{\alpha} \approx 20^\circ \pm 6^\circ$$

Diese Werte stimmen mit der nach der von Hasse (1974) aufgestellten Beziehung

$$(3.2.3-3) \quad |\tilde{u}| = a |\tilde{u}_g| + b$$

(wobei $a = 0.54 - 0.012 \cdot \Delta T_{L-W}$, $b = 1.68 - 0.105 \cdot \Delta T_{L-W}$ [m/s] ist)

gut überein, wenn man den von Behrendt (1976) aus den Messungen der Profilmessanlage ermittelten Wert von $\overline{\Delta T}_{L-W} = 1.7^\circ$ (Temperaturdifferenz Luft/Wasser) verwendet. Behrendt (1976) erhält auf Grund einer unabhängigen Untersuchung $\bar{\alpha} \approx 25^\circ$. Der Fehler in der Berechnung von \tilde{u} kann, wie man aus Abb. (3.2-3) ersieht, bis zu 8m/s im Betrag und 40° in der Windrichtung betragen. Aus weiteren Analysen ist ersichtlich, dass α auf Grund der Änderungen von ΔT_{L-W} entsprechenden Schwankungen während der Beobachtungsphase ausgesetzt ist.

Autospektren des beobachteten und des berechneten (gestrichelt) Windbetrages zeigt Abb. (3.2-4a), die entsprechenden Schub-

spannungsbeträge zeigt Abb. (3.2-4b). Die Schubspannung wurde aus den Winddaten gemäss

$$(3.2.3-4) \quad \tau = c_D (|\underline{u}_{10}|) \rho_a |\underline{u}_{10}| \underline{u}_{10}$$

berechnet (ρ_a = Dichte der Luft, \underline{u}_{10} = Windgeschwindigkeit in 10m Höhe), wobei c_D nach Garratt (1977) zu

$$(3.2.3-5) \quad c_D = (0.75 + 0.067 * |\underline{u}'_{10}|) * 10^{-3}$$

bestimmt wurde (\underline{u}'_{10} in [m/s]). Die Beziehungen (3.2.3-3) bis (3.2.3-5) wurden für alle Simulationsrechnungen verwendet.

Der Fehler zwischen geostrophisch berechnetem und beobachtetem Wind ist spektral deutlich erkennbar. Unterhalb von 2 Tagen fallen die geostrophisch berechneten Spektren sehr viel stärker ab: $|\underline{u}| \sim v^{-2}$, $|\underline{u}_g| \sim v^{-3.6}$, d.h. für den Periodenbereich unterhalb von 2 Tagen fällt das geostrophisch aus dem Luftdruckfeld von Liebing (1976) berechnete Spektrum viel zu stark ab. Dies lässt sich nur aus einer starken Glättung in den Druckdaten erklären (Willebrand (1978)).

In Abb. (3.2-4c) und (3.2-4d) ist Kohärenz k und Phase ϕ zwischen den beiden Stressen dargestellt. Man sieht, dass der aus den Beobachtungen berechnete Stress nur oberhalb von 2 Tagen einen Zusammenhang mit dem geostrophisch bestimmten Stress zeigt und dass der Phasenfehler für 50-80 Stunden Periode ca. 30° - 40° beträgt. D.h., der "wahre" Stress eilt dem geostrophisch berechneten um ca. 4-8 Stunden voraus. Da die Druckkarten alle 6 Stunden vorliegen, ist ein solcher Phasenfehler erklärbar.

Insgesamt folgt aus der Windanalyse, daß die Simulationsrechnungen, spektral gesehen, unterhalb von 2 Tagen nicht sinnvoll sind, da die Ergebnisse schon durch den fehlerhaften Wind nicht richtig simuliert werden können. Doch selbst oberhalb von 2 Tagen wird auf Grund des Phasenfehlers im Antrieb auch ein solcher in den modellierten Feldern erfolgen.

3.3 Simulationsrechnungen unter verschiedenen Bedingungen

Bei den Simulationsrechnungen wurde nicht darauf Wert gelegt, die freien Parameter, wie Reibung, Diffusion etc., so anzupassen, daß eine möglichst gute Übereinstimmung zwischen Modell und Beobachtung erreicht wurde; vielmehr wurde in Relation zu einer Referenz-Simulation der Einfluß verschiedener Faktoren (Reibung, Druckeffekt, offener Rand etc.) studiert. Zunächst wird die Referenz-Simulation definiert und diskutiert.

3.3.1 Referenzsimulation

Bei dieser Modellrechnung werden eine quadratische Bodenreibung nach (2.1.1-2) mit $b = 2.5 \cdot 10^{-3}$ und ein horizontaler Austausch von $A_h^M = 10^6 \text{ cm}^2/\text{s}$ verwendet. Im Fehmarnbelt wird der von Jacobsen (1976) für den Grossen Belt aus Strommeserketten ermittelte Transport vorgegeben, im Öresund 15% des Fehmarnbelt-Transports. Der auf einem 190 km-Gitter alle 6 Stunden vorhandene Bodenluftdruck (s. 3.2.3) wird bikubisch auf das 10 km-Modellgitter und innerhalb der 6 Stunden linear an allen Gitterpunkten des Modells auf $\Delta t = 3 \text{ min}$ interpoliert. Entsprechend den Gln. (3.2.3-3) bzw. (3.2.3-4) wurde mit dem geostrophischen Ablenkwinkel $\bar{\alpha} = 25^\circ$ und dem mittleren Wert $\Delta T_{L-W} = 1.5^\circ\text{C}$ der Windstress berechnet, dessen Eigenschaften in § 3.2.3 diskutiert wurden. Das Modell wurde vom Zustand der Ruhe aus gestartet und für knapp 2 Monate integriert: 1.4.1975 bis 26. 5. 1975.

3.3.1.1 Visueller Vergleich

Abb. (3.3-1a) zeigt für die Küstenorte Gedser, Ystad, Kolberg, Nexö, Landsort, Hamina und Oulu eine repräsentative Simu-

lierung des Wasserstandes (gestrichelte Kurve: Modellrechnung). Visuell zeigt sich relativ gute Übereinstimmung. Jedoch liegen die Wasserstände in der ersten Hälfte der Rechnung höher als die beobachteten, in der zweiten Hälfte umgekehrt. Eine derartige Abweichung kann man dadurch erreichen, daß der Mittelwert des vorgegebenen Transportes in den Belten nicht Null gesetzt wird. Für diese Rechnung ist der Mittelwert des Transports eliminiert worden; daher kann der Fehler nur daraus resultieren, daß der Mittelwert des für diesen Zeitraum am Fehmarnbelt und Öresund vorgegebenen Transports nicht richtig war, denn die mittleren Süßwasserzuflüsse für diesen Zeitraum können die Diskrepanz nicht erklären.

Manche der Extremwerte, z.B. am 13. - 14. 4., werden nicht richtig reproduziert. Eine Erhöhung des Widerstandskoeffizienten c_D würde zwar eine Verbesserung der Modellierung für diesen Zeitraum bringen, jedoch nicht für andere. Es scheint die in 3.2.3 verwendete Berechnungsgrundlage für c_D auszureichen. Hamina (und z.B. Helsinki) sind Orte, an denen die 1. und 2. Eigenfunktion der barotropen zweidimensionalen Seiches hohe Amplituden zeigt (s. Wübbler & Krauß (1979)). Dieser Sachverhalt ist auch in Abb. (3.3-1a) auffällig und zeigt sich ebenfalls im langjährigen Spektrum, wie weiter unten ersichtlich.

Während es scheint, daß die Wasserstände über diesen langen Zeitraum zufriedenstellend simuliert werden, erweist sich die Simulation der mittleren Strömung als nicht ausreichend. Abb. (3.3-1b) zeigt für denselben Zeitraum ein "bestes" Beispiel (Position 2 in der oberen Hälfte des Bildes) und ein

"schlechtes" (Position 9 in der unteren Hälfte des Bildes). Es ist jeweils die Ost-West-, Nord-Süd-Komponente, Betrag und Richtung dargestellt. Doch sieht man, daß die Simulation z.B. vom 13.5. - 15.5. für beide Fälle bezüglich der Richtung "recht gut" ist, für den Betrag zu klein (Faktor $1/2$). Für diesen Zeitpunkt hat Simons (1976), der einen stärkeren Windstress annimmt ($c_D = \text{const} = 2.1 \cdot 10^{-3}$), ein ähnliches Ergebnis erhalten. Statistisch gesehen, ergibt sich aber ein sehr viel ungünstigeres Bild, wie noch gezeigt wird. Das auffällige Signal am 14. 4., das auch im Wasserstand vorhanden war, zeigt sich ebenfalls in der mittleren Strömung und wird an den meisten Verankerungspositionen relativ gut simuliert, besonders in den flacheren Regionen. Letzteres weist ebenso wie bei Simons (1976) darauf hin, dass der vom Modell produzierte Ekmanstrom realistisch modelliert wird. In den tieferen Regionen hingegen sind die Simulationen unbefriedigend.

Aus den Untersuchungen der idealisierten Rechnungen geht hervor (§ 2.2), daß man mit einem barotropen Modell prinzipiell keine befriedigenden Simulationen der Strömung erwarten kann. Für eine spezielle Situation vom 1. - 10. 5. erhält Simons (1976) aus den baroklinen Rechnungen auch günstigere Ergebnisse. Ob das auch im statistischen Sinne für einen grösseren Zeitraum der Fall wäre, bleibt zu prüfen.

Der vom barotropen Modell zu klein modellierte Geschwindigkeitsbetrag liesse sich durch eine Erhöhung von c_D oder Verminderung der Reibung verbessern; ein benötigter Faktor 2 würde dann aber im Widerspruch zur Wasserstandssimulation stehen. Weiter unten wird gezeigt, daß zwischen den aus den Messungen bestimmten mittleren Strömungen - spektral

gesehen - kaum ein Zusammenhang erkennbar ist, so daß die Stärke der Strömung nicht den wesentlichen Unterschied zwischen Modell und Beobachtung ausmacht.

3.3.1.2 Spektraler Vergleich

Um die simulierten Rechnungen statistisch zu erfassen, wurden von den Wasserständen und vertikal gemittelten Strömungen Spektren berechnet. Abb. (3.3-2a) und (3.3-2b) zeigen den Vergleich zwischen den Autospektren der Wasserstände der beiden Orte Ystad und Hamina als repräsentative Beispiele (gestrichelt: Modell). Man sieht, daß der Bereich oberhalb von Perioden von einem Tag Niveau bzw. Steigung der Spektren gut simuliert ist, wobei der Zusammenhang zwischen Modell und Messung durch die in Abb. (3.3-2c) dargestellte Kohärenz (für beide Orte) gegeben ist. Man sieht, daß unterhalb von einem Tag die Null-Kohärenz-Hypothese auf dem 95%-Niveau nicht verworfen werden kann, d.h. in diesem Bereich haben Modell und Messung nichts gemeinsam. Entsprechend ist es sinnvoll, die Phase zwischen Modell und Beobachtung (Abb. 3.3-2d) nur oberhalb der Perioden von einem Tag zu vergleichen. Man sieht, daß bei ca. 50 Stunden die Phase zwischen Modell und Messung bis zu 20° beträgt. Man erhält das eigenartige Ergebnis, daß im Bereich von 50 - 100 Stunden das Modell der Beobachtung für den Ort Hamina voraneilt, für Ystad aber gerade der umgekehrte Sachverhalt gilt. Zwischen 10-50 Stunden zeigen beide Phasenfehler in die gleiche Richtung (Modell hinkt hinterher).

Eine auffällige Erscheinung bilden in allen Spektren und für sehr unterschiedliche Parametersätze die Spitzen bei 3 - 6 Stunden, die auch in den Strömungsspektren vertreten sind. Zwar liegen alle diese Spitzen im inkohärenten Bereich

und sogar unter dem beobachteten Energieniveau. Dennoch ist versucht worden festzustellen, woher diese Spitzen kommen. Es wurde kein Grund dafür gefunden, daß die Spitzen aus irgendeiner Modelleigenschaft stammen (Phasenfehler, Fehler in der Gruppengeschwindigkeit etc.). Verwendet man einen Zufallswind, der in Raum und Zeit ein weißes Spektrum hat, so häuft sich die Energie erwartungsgemäss bei den Seiches niedriger Ordnung, weniger aber bei den Perioden von 3 - 6 Stunden. Letztere ist nahezu für alle Ostseegebiete eine dominante Periode der Querschwingungen. Sollten die auffälligen Spitzen, die immer signifikant vom Rauschpegel abgehoben sind, von solchen Querschwingungen herkommen, so ist zu fragen, warum in den Beobachtungen kaum Anzeichen (nur Andeutungen in Abb. (3.3-2a/b)) für eine Energiekonzentration an dieser Stelle zu finden sind. Eine Analyse des in § 3.2.3 beschriebenen Windes zeigt zwar eine Spitze im Bereich von 5 - 6 Stunden der geostrophisch berechneten Nord-Komponente, doch ist es unverständlich, warum das Modell spektral so stark reagiert. In der Zeitreihendarstellung sind Fluktuationen dieser Periode wegen ihrer kleinen Amplitude kaum auszumachen. Da das Phänomen nur im inkohärenten Bereich liegt, in dem das Spektrum ohnehin auf Grund des stark geglätteten Windes (s. § 3.2.3) zu stark abfällt, soll hierauf nicht weiter eingegangen werden.

Der auffällige Knick der Spektren von Hamina in Modell und Beobachtung ist nicht nur für den simulierten Zeitraum von 2 Monaten vorhanden. Wie das Spektrum einer 57 Jahre langen Pegelregistrierung von Helsinki (1904-1961) in Abb. (3.3-3a) zeigt, ist dieser Knick ein Charakteristikum des inneren Finnischen Meerbusens. Ein Vergleich mit den Spektren aus 11 Jahre langen Registrierungen von Kemi und Mäntyluoto

(Abb. (3.3-3b)) zeigt, daß der Knick in Wirklichkeit eine Energiekonzentration im Bereich der Seiches-Eigenfunktionen niedriger Ordnung (26-31 Stunden, Wübbler & Krauß (1979)) ist.

Die Frage, in wie weit der innere Zusammenhang der Pegelregistrierungen vom Modell simuliert werden kann, geht aus Abb. (3.3-4a) bis (3.3-4d) hervor. Man sieht, daß im Mittel die Kohärenz zwischen Gedser und Ystad (a,c) für die Daten stärker abnimmt als für das Modell, d.h. das Modell macht (auch auf Grund des glatteren Windes) "zu kohärente" Vorhersagen. Das Phasenverhalten (b,d) zeigt den Sachverhalt, daß in den Daten langperiodische Signale zuerst in Ystad, dann in Gedser sind, wie es für an der Küste entlang wandernde Wellen (Küste "rechts") sein sollte. Das Modell macht innerhalb der hier verwendeten Statistik gerade die unverständlichere umgekehrte Aussage. Andererseits gibt es auch in den Daten Fälle (z.B. Simrishamn-Åhus), für die die Signale die Küste "links" haben. Und ausserdem sind die Konfidenzgrenzen möglicherweise unterschätzt worden.

Entsprechend dem unbefriedigenden Zusammenhang von Modell und Beobachtung bei den mittleren Strömungen im Zeitbereich zeigen auch die Spektren - Abb. (3.3-5a) - (3.3-5d) - diesen Sachverhalt. So stimmen z.B. das Spektrum der Ostkomponente der Strömung (a) von Position 1 im Bereich zwischen 50-100 Stunden halbwegs überein, bei Position 9 jedoch liegt das modellierte Energieniveau in diesem Bereich viel zu niedrig (b). Die Kohärenz zwischen Beobachtung und Modell liegt aber für beide Beispiele im wesentlichen unterhalb der 95% Signifikanzschwelle (c,d), wenn auch mit einem Anstieg zwischen 50-100 Stunden. Unterhalb von 1-2 Tagen fällt das modellierte Spektrum wie bei den Wasserständen zu steil ab.

3.3.1.3 Geschicklichkeitskoeffizienten, Korrelation etc.

Gemäß § 3.1.2 sind in Tabelle 3 des Anhangs für einige Pegelorte und die Position 1 von B A L T I C ' 75 berechnete Streuung, die Korrelations- und Geschicklichkeitskoeffizienten der Wasserstände bzw. Strömungen (in Spalte 1-4) angegeben. Ausser bei den Strömungskomponenten und dem "schlechtesten" Ergebnis der Wasserstandssimulation, Furuögrund, sind alle Korrelationskoeffizienten signifikant von Null verschieden.

3.3.2 Einfluß der Belte im barotropen Modell

Wie in Kielmann (1976) festgestellt wurde, haben die Ein/Ausstromverhältnisse in den Belten einen starken Einfluß auf die Wasserstands- und Strömungssimulation - letztere besonders im Bornholmgatt.

3.3.2.1 Geschlossene Ostsee

Während das spektrale Verhalten der Wasserstände sich im Bereich unterhalb von 5 Tagen kaum ändert, wenn man die Ostsee an den Belten abschliesst, zeigt Abb. (3.3-6) für einige Pegelorte bei geschlossener Ostsee, daß die Wasserstände im Mittel unbefriedigende Abweichungen zeigen, z.B. fällt der Wasserstand wegen der vom 1. - 10. 5. beobachteten Ausstromlage im geschlossenen Modell nicht richtig ab. Bei den mittleren Strömungen im Bornholmgat können die Differenzen 10cm/s und mehr betragen (s. auch § 2).

3.3.2.2 Offene Ostsee

Durch Vorgabe der Transporte in den Belten konnten die Wasserstände in der Referenzsimulation zufriedenstellend

reproduziert werden. Da die Transporte nicht immer bekannt sind, wurde nach der in § 1.4.3 geschilderten Methode der in Marienleuchte und Rödbby beobachtete Wasserstand im Fehmarnbelt vorgegeben und der Transport nach Gl. (1.4.3-3) für jeden Zeitschnitt mit $\lambda = 0$ berechnet. Während das spektrale Verhalten der simulierten Wasserstände in der westlichen Ostsee erwartungsgemäss stark verbessert wurde, konnte der vom 1.5. - 10.5. zu verzeichnende Abfall des mittleren Wasserstandes nicht so gut reproduziert werden, wie bei Vorgabe der beobachteten Transporte. Abb. (3.3-7) zeigt den vom Modell berechneten Transport am Fehmarnbelt (b) im Vergleich mit dem von Jacobsen (1976) aus Strommesserdaten berechneten (a). Obwohl grosse Ähnlichkeit im Verlauf der Kurven besteht, sieht man, daß weder die Ausstromlage Anfang Mai noch die starke Einstromlage Ende Mai in der richtigen Phase und Grössenordnung berechnet werden. Ebenso gut könnte man die schon in Gl. (1.4.3-1) beschriebene halb-empirische Formel verwenden, aus der sich der in (c) dargestellte Transport ergibt. Dasselbe gilt aber auch für den aus der Wasserstandsdifferenz Rödbby-Marienleuchte geostrophisch berechneten Transport (d). Man kann zwischen den Transporten (b) - (d) also nicht diskriminieren. Es ist anzunehmen, daß bei besserer Auflösung in den Belten ein günstigeres Ergebnis zu erwarten ist, wenn man versucht, für die Transportberechnung nach dem in § 1.4.3 geschilderten Ausgleichsprinzip (Modellwasserstand gleicht sich an beobachteten an) zu verfahren.

3.3.3 Einfluß verschiedener anderer Faktoren

3.3.3.1 Reibung

Ändert man den horizontalen Austausch von $A_h^M = 10^6 \text{ cm}^2/\text{s}$ auf $10^7 \text{ cm}^2/\text{s}$, so ergibt sich im hochfrequenten Teil keine

Änderung des Spektrums; das Energieniveau im niederfrequenten Bereich ist aber niedriger (oberhalb Perioden von 4 Tagen). In Willebrand et al. (1980) wird dies auf die stärkere Dissipation von kurzen Rossby-Wellen (planetarische Wellen mit Gruppengeschwindigkeit nach Osten) zurückgeführt. Da hier nur topographische Rossby-Wellen von Bedeutung sind, werden diese entsprechend mit wachsendem Austausch A_h^M dissipiert. Letzteres wird auch durch die Bemerkungen zur Dämpfung in § 1.3 unterstützt. Tabelle 3 zeigt auch eine Reduktion in der Gesamtvarianz (Spalte 5), aber nicht von der Referenzsimulation signifikant unterscheidbare Korrelationskoeffizienten. Verstärkte lineare oder quadratische Bodenreibung bewirkt im Frequenzspektrum überall eine gleichmässige Reduktion der Energie.

3.3.3.2 Windeffekt versus Druckeffekt

Lässt man das Modell mit $|\tau| = 0$ rechnen und verwendet nur die horizontalen Druckgradienten, so erhält man die Wirkung des Druckes allein. Dieser produziert für BALTIC'75-Verhältnisse Wasserstandsänderungen von bis zu 20cm (Kielmann (1976)). Sie treten durch die Anregung der Seiches niedriger Ordnung besonders deutlich z.B. in Hamina auf. Abb. (3.3-8a) zeigt das Spektrum des Wasserstandes bei Ystad für den reinen Windeffekt (Druckgradienten vernachlässigt) und den reinen Druckeffekt im Vergleich. Man sieht, daß das Energieniveau im niederfrequenten Bereich eine Größenordnung niedriger ist. Erwartungsgemäss ist der Effekt von Druck und Wind jedoch unterhalb von 10 Stunden gleich gross. Ein Beispiel für den Druckeffekt im Zeitbereich zeigt Abb. (3.3-8b).

3.3.3.3 Andere Effekte

Die Änderung des geostrophischen Ablenkungswinkels von $\alpha = 25^\circ$ auf 10° bzw. 40° verursacht keine nennenswerten Änderungen (s. die letzten beiden Spalten in Tabelle 3). Jedoch werden zeitweise Änderungen der Strömung von 1 - 3 cm/s beobachtet.

Verwendet man den im Bornholmbecken gemessenen Wind global für die gesamte Ostsee (wie Simons (1976)), so nehmen die Kohärenzen für Wasserstand und Strömung zwischen Beobachtung und Modell erheblich ab, so daß angenommen werden muss, daß ausserhalb des Bornholmgebietes erzeugte Signale in das Becken einwandern und nur bei Verwendung des globalen Windes erfasst werden.

Es ist klar, daß die oben aufgeführten Effekte gegenüber der Wirkung der Schichtung von untergeordneter Bedeutung sind.

4. Schlußbetrachtung

Es ist immer ein Problem bei der Diskussion von Modellrechnungen, inwieweit diese die "wahren" Verhältnisse wiedergeben. Die zuletzt betrachteten Simulationsrechnungen beschäftigen sich mit einem Teil dieser Frage. Obwohl diese Simulationsrechnungen nur barotrop waren, lassen sie zusammen mit Ergebnissen anderer Autoren den Schluß zu, daß die lokale Verifikation von Beobachtungsdaten in der Ostsee auch im statistischen Sinne noch nicht befriedigend ist.

Es gibt Hinweise darauf, daß die idealisierten Rechnungen prinzipielle Eigenschaften der Ostsee richtig darstellen, wenn man qualitative Vergleiche mit historischen Daten (Beispiel: Auftreten der stärksten Oberflächenströmungen an der Ostseeite der Bottensee) und Messungen aus neuerer Zeit heranzieht. Ob z. B. die berechnete Struktur der Transporte in der gesamten Ostsee realistisch ist, ist eine offene Frage. Jedoch stehen die vorliegenden Rechnungen nicht im Widerspruch zu früheren Arbeiten.

Das hier verwendete Modell der gesamten Ostsee läßt auf Grund seiner gegenüber früheren Modellen erhöhten horizontalen und vertikalen Auflösung weiterhin erkennen, daß topographisch bedingte Phänomene eine wichtige Rolle spielen. Die Vergleiche zwischen barotropen und baroklinen Rechnungen ergeben, daß Schichtung und Topographie die Struktur der Strömungen und Transporte wesentlich bestimmen. So haben die vertikalen Stromprofile im baroklinen Fall erwartungsgemäß die Gestalt von Eigenfunktionen. Darüberhinaus erhält man jedoch häufig über wenige Meter ein starkes Anwachsen der Strömungsamplituden zum Boden hin, wie man es für kurze topographische Rossby-Wellen erwarten würde.

Inwieweit die aus Satellitenbeobachtungen in jüngster Zeit erkennbaren Wirbelstrukturen an der Oberfläche der Ostsee mit den topographischen Wirbeln des Modells zusammenhängen, muss noch näher geklärt werden. Wegen der langen Perioden dieser Erscheinungen und wegen ihres offensichtlich vom Wettergeschehen abhängigen und daher zufälligen Auftretens müssen aus statistischen Gründen möglichst lange Beobachtungsreihen (mehrere Monate) in der gesamten Ostsee auf diese topographischen Phänomene hin analysiert werden. Da die topographischen Wellen sich weniger in Wasserstandsänderungen bemerkbar machen, benötigt man für die Analyse zusätzlich lange Strommessungen. Eventuell kann auch historisches Datenmaterial verwendet werden.

Das barokline Modell könnte parallel dann unter Mitnahme der nicht-linearen Terme für längere Zeit mit dem beobachteten Wind integriert werden, wobei die numerische und physikalische Diffusivität minimiert werden müssten. Die Statistik der so erzeugten Modelldaten wäre dann mit der Statistik der Beobachtungen zu vergleichen und könnte einen wichtigen Hinweis auf die Bedeutung der topographischen Wellen für die Entstehung von Wirbeln und deren Rektifizierung, mithin auf das Problem der Zirkulation der Ostsee, geben.

Danksagung

Für die Anregung zu dieser Arbeit und Hilfestellung danke ich Herrn Prof. Dr. W. Krauß sehr. Allen Kollegen in der Abteilung Theoretische Ozeanographie danke ich für ihre freundliche Diskussionsbereitschaft. Dies gilt insbesondere für Herrn Dr. J. Willebrand, der mir viele wertvolle Ratschläge gegeben hat.

Meiner Mutter, Frau E. Kielmann, und Frau D. Raasch bin ich für die sorgfältige Erstellung des Manuskriptes zu Dank verpflichtet.

Ich danke Herrn J. Holtorff und Frau M. Hirschberg für die Geduld, Mühe und Sorgfalt, mit der sie die Abbildungen erstellt haben. Viele der Zeichenprogramme wurden für diese und andere Modellrechnungen von Herrn J. Holtorff entwickelt.

Für die Unterstützung bei den Modellrechnungen danke ich den Mitarbeitern des Rechenzentrums am IfM, des Rechenzentrums der Universität Kiel sowie Mitarbeitern des Regionalen Rechenzentrums in Niedersachsen.

Kiel, April 1981

LS

2 802

2. Ex.

B E R I C H T E
AUS DEM
INSTITUT FÜR MEERESKUNDE
AN DER
CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT KIEL

NR. 87B

DOI 10.3289/IFM-BER-87b

GRUNDLAGEN UND ANWENDUNG EINES NUMERISCHEN
MODELLS DER GESCHICHTETEN OSTSEE

TEIL 2

(Anhang, Literatur, Abbildungen)

VON

JÜRGEN KIELMANN



Präs.-Ex.!

Kopien dieser Arbeit können bezogen werden von:
Institut für Meereskunde an der Universität Kiel
Abt. Theoretische Ozeanographie
23/Kiel
Düsternbrooker Weg 20

ISSN 0341-8561

ANHANG A1.1

Reynolds-Mittelung:

Besteht ein Flüssigkeitsvolumen der Dichte ϱ aus mehreren Flüssigkeitspaketen der Dichte $\varrho^{(i)}$ und der Geschwindigkeit $\underline{v}^{(i)}$, so gilt für jedes Paket die Gleichung der Massenerhaltung (Kontinuitätsgleichung):

$$(A1.1-1) \quad \varrho_t^{(i)} + \nabla \cdot (\varrho^{(i)} \underline{v}^{(i)}) = 0 \quad .$$

Da die Kontinuitätsgleichung ebenfalls für die Gesamtmasse ϱ gelten muß, ist die Geschwindigkeit des gesamten Flüssigkeitsvolumens zu definieren als

$$(A1.1-2) \quad \hat{\underline{u}} = \frac{\sum \varrho^{(i)} \underline{v}^{(i)}}{\sum \varrho^{(i)}} \quad ,$$

d.h. als normiertes Mittel aller Impulse. (Vergl. Kamenkovich, 1977).

Definiert man daher den Impuls

$$(A1.1-3) \quad \hat{\underline{m}} = \hat{\varrho} \hat{\underline{u}}$$

und setzt

$$(A1.1-4) \quad \hat{\underline{m}} = \underline{m} + \underline{m}', \quad \hat{\varrho} = \underline{\varrho} + \varrho', \quad \hat{p} = p + p' \quad \text{etc.},$$

so folgt aus der Kontinuitätsgleichung

$$(A1.1-5) \quad \frac{\partial \underline{\varrho}'}{\partial t} + \frac{\partial \underline{\varrho}}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{m} + \nabla \cdot \underline{m}' = 0$$

die gemittelte Gleichung

$$(A1.1-6) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{\underline{m}} = 0 \quad .$$

Definiert man die mittlere Geschwindigkeit als

$$(A1.1-6a) \quad \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{m}}/\varrho \quad ,$$

so folgt die Gleichung (1.1.1-1b).

Die Bewegungsgleichungen lassen sich schreiben als

$$(A1.1-7) \quad \frac{\partial \hat{\underline{\underline{m}}}}{\partial t} + \nabla \cdot \frac{1}{\hat{\varrho}} \hat{\underline{\underline{m}}}^2 + \dots = 0$$

und mittels der Reynoldsbedingungen als

$$(A1.1-8) \quad \frac{\partial \underline{\underline{m}}}{\partial t} + \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{\varrho} \left[1 - \frac{\varrho'}{\varrho} + \dots \right] \left[\underline{\underline{m}}^2 + \overline{\underline{\underline{m}}' \underline{\underline{m}}'} \right] \right\} + \dots = 0.$$

Definiert man

$$(A1.1-9) \quad \underline{\underline{u}}' = \underline{\underline{m}}'/\varrho$$

und beachtet $\varrho'/\varrho \ll 1$, so folgt (1.1.1-1a) und entsprechend die anderen Gleichungen (1.1.1-1).

Skalen und dimensionslose Zahlen:

Die Größenordnungen von L_0 , H_0 , U_0 , γ werden für Ostseeverhältnisse in maximalen, minimalen und typischen Abmessungen betrachtet, da sie lokal insbesondere auf Grund der Topographie sehr verschieden sein können.

In den folgenden Tabellen sind jeweils die Ordnungen $O(\dots)$ in CGS-Einheiten angegeben. Typische Längen und Geschwindigkeits-Skalen beziehen sich auf topographische Rossby-Wellen, für die die angegebene Zeitskala von f^{-1} allerdings zu klein bemessen ist, d.h. die zeitlichen Ableitungen und ebenfalls ζ werden überschätzt.

<u>Variable</u>	<u>Typisch</u>	<u>Maximum</u>	<u>Minimum</u>
L_o	$4 \cdot 10^6$	10^8	10^6
H_o	$5 \cdot 10^3$	10^4	10^3
U_o	5	50	1
γ	10^{-3}	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$

Die abgeleiteten Größen werden aus zusammenpassenden Kombinationen von L_o , H_o , U_o , γ berechnet.

<u>Variable</u>	<u>Typisch</u>	<u>Maximum</u>	<u>Minimum</u>
δ	10^{-3}	10^{-2}	10^{-4}
ξ	10^{-2}	10^{-1}	10^{-4}
F	10^{-2}	10	10^{-3}
ξF	10^{-4}	1	10^{-7}
$B = \gamma/F$	10^{-1}	5	10^{-3}

Die Ekmanzahlen hängen von den Austauschkoeffizienten ab und werden maximal für die Grenzschichten und minimal für das innere des Meeres angegeben:

<u>Variable</u>	<u>Typisch</u>	<u>Maximum</u>	<u>Minimum</u>
A_h^M	10^6	10^7	10^5
A_v^M	10	10^2	10^{-1}
K_h	10^5	10^6	10^4
K_v	1	10	10^{-2}
E_h	10^{-4}	10^{-1}	10^{-8}
E_v	10^{-3}	10^{-2}	10^{-5}
E'_h	10^{-5}	10^{-2}	10^{-9}
E'_v	10^{-4}	10^{-3}	10^{-6}
$Re = \xi/E_h$	10-100	10^7	10^{-3}
$Re = \xi/E_v$	1-10	10^4	10^{-2}

Randbedingungen

Die Bedingungen (1.1.3-1) bis (1.1.3-4) werden folgendermaßen approximiert (z.B. Krauß, 1973):

Meeresoberfläche $z = \zeta(x, y, t)$

(A1.1-10)

$$a) \nabla \zeta \cdot A_h^M \nabla_h u_h - A_v^M \frac{\partial u_h}{\partial z} = - \tau^s / \rho$$

$p(\zeta) = \text{Luftdruck } p_a$

$$b) \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_h \cdot \nabla \zeta - w = (N-V)/\rho$$

$$c) \quad \nabla \cdot A_h^T \cdot \nabla_h T - A_v^T T_z = - Q/c_p \rho$$

$$d) \quad \nabla \cdot A_h^S \cdot \nabla_h S - A_v^S S_z = S(N-V)/\rho$$

mit N = Niederschlag, V = Verdunstung, Q dem nach unten gerichteten Wärmetransport und τ^S dem Windstressvektor.

Meeresboden $z = -H(x,y)$

(A1.1-11)

$$a) \quad \nabla H \cdot A_h^M \cdot \nabla_h u_h + A_v^M \frac{\partial u_h}{\partial z} = \tau^b/\zeta$$

$$b) \quad u_h \cdot \nabla H + w = 0$$

$$c) \quad A_h^T \cdot \nabla H \cdot \nabla T + A_v^T T_z = 0 \quad (\text{Isolierter Boden})$$

$$d) \quad A_h^S \cdot \nabla H \cdot \nabla S + A_v^S S_z = 0 \quad (\text{kein Salzfluß durch H})$$

Dabei ist τ^b der Bodenstress in der Tangentialebene des Bodens, der geeignet spezifiziert werden muß (siehe 1.4.1). Statt der Bedingung (a) werden häufig auch "slip" oder "no-slip" Bedingungen verwendet (z.B. Simons 1980):

Fläche $z = \text{const}$ (im Inneren des Mediums)

(1.1-12)

$$a) \quad (pk + A_v^M \frac{\partial u}{\partial z})_1 = (pk + A_v^M \frac{\partial u}{\partial z})_2$$

$$b) \quad w_1 = w_2$$

$$c) \quad (A_v^T \frac{\partial T}{\partial z})_1 = (A_v^T \frac{\partial T}{\partial z})_2$$

$$d) \quad (A_v^S \frac{\partial S}{\partial z})_1 = (A_v^S \frac{\partial S}{\partial z})_2$$

mit k = vertikaler Einheitsvektor. Die Bedingungen werden für die Diskretisierung in feste Schichten benötigt.

Seitliche feste Berandungen

(A1.1-13)

- a) $\tilde{u}_{\text{tang}} = 0$ "no-slip"
- b) $\tilde{u}_{\text{normal}} = 0$ (kein Massenfluß durch Rand)
- c) $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ (Rand isoliert)
- d) $\frac{\partial S}{\partial n} = 0$ (kein Salzfluß durch Rand)

Seitlich offener Rand $x = \text{const}$

(A1.1-14)

- a) $(A_h^M \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x})_1 = (A_h^M \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x})_2$
- b) $(u)_1 = (u)_2$ Massenfluß
- c) $(A_h^T \frac{\partial T}{\partial x})_1 = (A_h^T \frac{\partial T}{\partial x})_2$ oder $= Q^*/c_p \varrho$ (Wärmezufuhr)
- d) $(A_h^S \frac{\partial S}{\partial x})_1 = (A_h^S \frac{\partial S}{\partial x})_2$ oder $= S \Delta M^*/\varrho$ (Frischwasserzufuhr)

mit ΔM^* als Süßwasserzufuhr in x-Richtung. Die Spezifikation der Randbedingungen am offenen Rand kann zu Problemen führen (siehe 1.2.5 und 1.2.6). Außerdem ist die Darstellung (a) nur bezüglich des in (1.1.1-3) definierten Stress-Tensors richtig.

ANHANG A1.2

Fall 1

Das System (1.2.2-1) läßt sich in der Form (1.2.1-1) schreiben, wenn man setzt:

$$(A1.2.-1) \quad \underset{\sim}{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ g \\ e \\ s \end{pmatrix}, \quad \underset{\sim}{B} = \begin{pmatrix} g(\hat{f}w - fv) \\ g \hat{f}u \\ g(g - \hat{f}w) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \theta = \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g\delta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g\gamma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} \xi u g & 0 & 0 & c^2 & a & b \\ 0 & \xi u g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi \delta^2 u g & 0 & 0 & 0 \\ g^2 & 0 & 0 & g^2 u g & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & u g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u g \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \xi v g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi v g & 0 & c^2 & a & b \\ 0 & 0 & \xi \delta^2 v g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^2 & 0 & g^2 v g & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 & v g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v g \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} \xi w g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi w g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi \delta^2 w g & c^2 & a & b \\ 0 & 0 & g^2 & g^2 w g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & w g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w g \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom lautet dann $P(\lambda) = \|A\|$ mit

$$A = \begin{pmatrix} (\lambda + \varepsilon \delta) \vartheta & 0 & 0 & \lambda_1 c^2 & \lambda_1 a & \lambda_1 b \\ 0 & (\lambda + \varepsilon \delta) \vartheta & 0 & \lambda_2 c^2 & \lambda_2 a & \lambda_2 b \\ 0 & 0 & \delta^2 (\lambda + \varepsilon \delta) \vartheta & \lambda_3 c^2 & \lambda_3 a & \lambda_3 b \\ \lambda_1 \vartheta^2 & \lambda_2 \vartheta^2 & \lambda_3 \vartheta^2 & \vartheta^2 (\lambda + \delta) \vartheta & 0 & 0 \\ \lambda_1 p & \lambda_2 p & \lambda_3 p & 0 & (\lambda + \delta) \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda + \delta) \vartheta \end{pmatrix}$$

Damit (1.2.2-1) noch hyperbolisch genannt werden kann, müssen zu der 4-fachen Nullstelle $\lambda = -\delta$ auch 4 linear unabhängige Eigenvektoren existieren. Setzt man in A für λ den Wert $-\delta$, so bleiben von der Gleichung $A \tilde{r} = 0$ nur die folgenden linear unabhängigen Gleichungen übrig (r_i = Komponenten des Eigenvektors):

$$(A1.2-2) \quad r_4 + a/c^2 r_5 + b/c^2 r_6 = 0$$

$$\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \lambda_3 r_3 = 0 \quad .$$

Gibt man jeweils $(r_4, r_5) = (0, 1)$ oder $(1, 0)$ und ebenfalls $(r_1, r_2) = (0, 1)$ oder $(1, 0)$ vor, so erhält man die 4 Rechts-eigenvektoren z.B. zu

$$(A1.2-3) \quad \tilde{r}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\lambda_2/\lambda_3 \\ 0 \\ 1 \\ -a/b \end{pmatrix} \quad \tilde{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\lambda_1/\lambda_3 \\ 0 \\ 1 \\ -a/b \end{pmatrix} \quad \tilde{r}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\lambda_2/\lambda_3 \\ 1 \\ 0 \\ -c^2/b \end{pmatrix} \quad \tilde{r}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\lambda_1/\lambda_3 \\ 1 \\ 0 \\ -c^2/b \end{pmatrix}$$

Diese Vektoren sind offensichtlich linear unabhängig (aber weder normiert, noch orthogonal zu einander). Im Falle, daß a, b gegen 0 oder gegen ∞ strebt, muß man die Eigenvektoren nur etwas anders definieren. Es gibt aber auch für diesen Fall 4 unabhängige. Ebenfalls für $c^2 \rightarrow \infty$. Die Anzahl der linear unabhängigen Vektoren bleibt auch erhalten, wenn einige der λ_i verschwinden, es muß nur $\sum \lambda_i^2 = 1$ bleiben.

Fall 3

Das System 1.2.-1a bis d und 1.2.-11 läßt sich in der Form (1.2.1-1) schreiben, wenn man setzt

$$(A1.2-4) \quad \underset{\sim}{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \xi \\ p \end{pmatrix} \quad \underset{\sim}{B} = \begin{pmatrix} \xi(\hat{f}w - fv) \\ \xi fu \\ \xi(\hat{g} - \hat{f}u) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \phi = \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi \delta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi \delta^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\xi & \xi c^{-2} \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} \xi u \xi & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \xi u \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2 \xi u \xi & 0 & 0 \\ \xi^2 & 0 & 0 & \xi^2 u \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -u \xi & \xi u c^{-2} \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \xi v \xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi v \xi & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \xi^2 \xi v \xi & 0 & 0 \\ 0 & \xi^2 & 0 & \xi^2 v \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -v \xi & \xi v c^{-2} \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} \xi w \xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi w \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2 \xi w \xi & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \xi^2 & \xi^2 w \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -w \xi & \xi w c^{-2} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} (\lambda + \epsilon \delta) \vartheta & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & (\lambda + \epsilon \delta) \vartheta & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \delta^2 (\lambda + \epsilon \delta) \vartheta & 0 & \lambda_3 \\ \lambda_1 \vartheta^2 & \lambda_2 \vartheta^2 & \lambda_3 \vartheta^2 & \vartheta^2 (\lambda + \delta) \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda + \delta) \vartheta & \vartheta (\lambda + \delta) c^2 \end{pmatrix}.$$

Die linear unabhängigen Eigenwertgleichungen $A \tilde{r} = 0$ lauten demnach für $\xi = \delta^2 = \vartheta^2 = 1$ und $\lambda = -\delta$:

$$\lambda_1 \vartheta^{-1} r_5 = 0$$

$$\lambda_1 \vartheta^2 r_1 + \lambda_2 \vartheta^2 r_2 + \lambda_3 \vartheta^2 r_3 = 0,$$

d.h. $r_5 = 0$, r_4 frei wählbar, (r_1, r_2) frei wählbar als z.B. $(0, 1)$ und $(1, 0)$.

Man erhält damit die 3 linear unabhängigen Eigenvektoren z.B.

$$\tilde{r}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\lambda_2/\lambda_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\lambda_1/\lambda_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{r}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\lambda_1/\lambda_3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da die anderen beiden Nullstellen bzw. Eigenwerte untereinander und von $\lambda = -\delta$ verschieden sind, gibt es insgesamt 5 linear unabhängige Eigenvektoren. Fall 3 ist also ein hyperbolisches System in t-Richtung.

Zu 1.2.4:

Fall 7, System (1.2.4-1), läßt sich in der Form (1.2.1-1) schreiben, wenn man setzt

(A1.2-5)

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} U \\ V \\ \xi \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} -fV + \frac{1}{\xi_0} \gamma^{bx} & -\xi \frac{U}{h^2} & \tilde{v} \cdot \nabla H \\ fU + \frac{1}{\xi_0} \gamma^{by} & -\xi \frac{V}{h^2} & \tilde{v} \cdot \nabla H \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \xi \frac{2U}{h} & 0 & g^x \\ \xi \frac{V}{h} & \xi \frac{U}{h} & g^{xy} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \xi \frac{U}{h} & \xi \frac{U}{h} & g^{xy} \\ 0 & \xi \frac{2V}{h} & g^y \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $h = H + \xi$, $\xi, \alpha = 0, 1$, $g^{xy} = -\xi \alpha \frac{UV}{h^2}$

$$g^x = gh - \xi \alpha U^2/h^2, \quad g^y = gh - \xi \alpha V^2/h^2.$$

Setzt man $\mathcal{G} = (\lambda_1 U + \lambda_2 V)/h$ und $c^2 = gh$, so bestimmt sich

$A = \lambda A_0 + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$ wegen $A_0 = E$ zu

$$A = \begin{pmatrix} (\lambda + \xi[\mathcal{G} + \lambda_1 U/h]) & \xi \lambda_2 \bar{U} & \lambda_1 c^2 - \xi \alpha \mathcal{G} U/h \\ \xi \lambda_1 \frac{V}{h} & (\lambda + \xi[\mathcal{G} + \lambda_2 V/h]) & \lambda_2 c^2 - \xi \alpha \mathcal{G} V/h \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom (1.2.4-2) ergibt sich dann aus $P^t(\lambda) = \|A\|$ und $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$.

Im linearen Fall ($\xi = \alpha = 0$) erhält man die Matrizen

$$A^0 = E, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & gH \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & gH \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplikation von links mit der Matrix

$$A_0^* = \begin{pmatrix} (gH)^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & (gH)^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & (gH)^{+1/2} \end{pmatrix}$$

macht das System symmetrisch hyperbolisch.

Zu 1.2.5:

Die Eigenwerte der Matrix A_1 erhält man aus dem charakteristischen Polynom

$$\begin{vmatrix} (\xi 2\bar{u} - \lambda) & 0 & (c^2 - \xi \alpha \bar{u}^2) \\ \xi \bar{v} & (\xi \bar{u} - \lambda) & -\xi \alpha \bar{u} \bar{v} \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(\xi \bar{u} - \lambda)(\lambda^2 - \xi 2\bar{u} \lambda - c^2 + \xi \alpha \bar{u}^2) = 0$$

$$\text{mit } \bar{u} = \frac{U}{h}, \quad h = H + \xi, \quad c^2 = g(H + \xi) \quad .$$

Die Eigenwerte lauten dann

$$\begin{aligned}\lambda^{(1)} &= \xi \bar{u} + c \sqrt{1 + \frac{\bar{u}^2}{c^2}} \xi (\xi - \alpha) \\ \lambda^{(2)} &= \xi \bar{u} - c \sqrt{1 + \frac{\bar{u}^2}{c^2}} \xi (\xi - \alpha) \\ \lambda^{(3)} &= \xi \bar{u}\end{aligned}$$

Die Rechtseigenvektoren ergeben sich aus dem System

$$A_1 \tilde{r} = \lambda \tilde{r}.$$

Fasst man die Eigenlösungen $r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)}$ zur Matrix R zusammen, so läßt sich A_1 durch $\tilde{R}^{-1} A_1 \tilde{R}$ diagonalisieren. R ist nicht-singulär für alle Kombinationen ξ, α .

R hat die Form

$$R = \begin{pmatrix} \xi \bar{u} + \hat{c} & \bar{u} - \hat{c} & 0 \\ \xi \bar{v} \left(\frac{\bar{u}}{c} (\xi - \alpha) + 1 \right) & \xi \bar{v} \left(\frac{\bar{u}}{c} (\xi - \alpha) - 1 \right) & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \hat{c} = c \sqrt{1 + \frac{\bar{u}^2}{c^2}} \xi (\xi - \alpha).$$

Wählt man die Vereinfachung $\xi = \alpha = 0$, so folgt

$$R = \begin{pmatrix} c & -c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2c} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2c} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Setzt man $\underline{U}^* = R^{-1} \underline{U}$ bzw. $\underline{U} = R \underline{U}^*$ und setzt \underline{U} in die Gleichung (1.2.5-1) ein, so folgt unter der Annahme, daß die Elemente von R konstant sind

$$R \frac{\partial \underline{U}^*}{\partial t} + A_1 R \frac{\partial \underline{U}^*}{\partial x} + \dots = 0$$

mit

$$\underline{U}^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{U}{c} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\zeta - \frac{U}{c} \right) \\ V \end{pmatrix}$$

Die Größen $\frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{U}{c} \right)$ und $\frac{1}{2} \left(\zeta - \frac{U}{c} \right)$ bezeichnet man auch als Riemann'sche Invarianten; sie sind auf den zugehörigen Charakteristiken konstant.

Multipliziert man die letzte Gleichung mit T^{-1} , so folgt

$$\frac{\partial \underline{U}^*}{\partial t} + R^{-1} A_1 R \frac{\partial \underline{U}^*}{\partial x} + \dots = 0$$

$$\text{mit } R^{-1} A_1 R = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_1^* .$$

Aus der letzten Beziehung folgt, da der zugehörige Eigenwert Null ist, daß $U_3^* = V$ im linearen Fall nicht vorgegeben zu werden braucht.

Falls R eine einigermaßen glatte Funktion der Koordinaten ist, gilt dieselbe Aussage auch für variable R (Kreiss und Oligier (1973)).

ANHANG A1.3Differenzengleichungen des vertikal integrierten Systems

1. Zeitliche Approximation: $\tilde{V}, \tilde{\zeta}$ verschränkt und semi-implizite Darstellung des Coriolis-Terms, Vernachlässigung der nicht-linearen Terme:

(A1.3-1)

$$\begin{aligned} \text{a) } \zeta^{n+1/2} &= \zeta^{n-1/2} - \Delta t \nabla \cdot \tilde{V}^n \\ \text{b) } U^{n+1} &= U^n + \frac{\Delta t f}{2} (\tilde{V}^{n+1} + V^n) + \Delta t \alpha^n \\ \text{c) } V^{n+1} &= V^n - \frac{\Delta t f}{2} (U^{n+1} + U^n) + \Delta t \beta^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \alpha^n &= -gH \zeta_x^{n+1/2} - \tau^{bx,n} + A_h (U_{xx}^n + U_{yy}^n) + \tau^{sx,n} \\ \beta^n &= -gH \zeta_y^{n+1/2} - \tau^{by,n} + A_h (V_{xx}^n + V_{yy}^n) + \tau^{sy,n} . \end{aligned}$$

Fasst man b) und c) als Gleichungssystem für U^{n+1}, V^{n+1} auf, so gewinnt man daraus das explizite Schema

(A1.3-2)

$$\begin{aligned} \text{a) } \zeta^{n+1/2} &= \zeta^{n-1/2} - \Delta t (U_x^n + V_y^n) \\ \text{b) } U^{n+1} &= \frac{1}{1+g^2} \left\{ (1-g^2) U^n + 2g V^n + \Delta t (\alpha^n + g \beta^n) \right\} \\ \text{c) } V^{n+1} &= \frac{1}{1+g^2} \left\{ (1-g^2) V^n - 2g U^n + \Delta t (\beta^n - g \alpha^n) \right\} \end{aligned}$$

mit $g = \frac{1}{2} f \Delta t$. Für die Modellrechnungen ist $f \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ und $\Delta t \sim 2 \cdot 10^2 \text{ s}$, d.h. $g \sim 10^{-2}$.

τ_b^n kann auf verschiedene Arten approximiert werden. Wir setzen $\tau_b^n \approx B^n V^n$ mit $B_{i,j}^n = B(H_{i,j}, V_{i,j}^n)$.

2. Räumliche Approximation: $\tilde{V}, \tilde{\zeta}$ verschränkt, siehe §1.3.2

Die Gleichungen (A1.3 -2) lauten dann in dem um 45° rotierten System:

(A1.3-4)

$$a) \zeta_{i-1/2, j-1/2}^{n+1/2} = \zeta_{i-1/2, j-1/2}^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta s'} \left\{ U_{i, j-1}^n - U_{i-1, j}^n + V_{i, j}^n - V_{i-1, j-1}^n \right\}$$

$$b) U_{i, j}^{n+1} = \frac{1}{1+\vartheta^2} \left\{ (1-\vartheta^2) U_{i, j}^n + 2\vartheta V_{i, j}^n + \Delta t (\alpha_{i, j}^n + \vartheta \beta_{i, j}^n) \right\}$$

$$c) V_{i, j}^{n+1} = \frac{1}{1+\vartheta^2} \left\{ (1-\vartheta^2) V_{i, j}^n - 2\vartheta U_{i, j}^n + \Delta t (\beta_{i, j}^n - \vartheta \alpha_{i, j}^n) \right\}$$

mit

(A1.3-5)

$$a) \alpha_{i, j}^n = -\frac{gH}{\Delta s'} \left(\zeta_{i+1/2, j-1/2}^{n+1/2} - \zeta_{i-1/2, j+1/2}^{n+1/2} \right) - BU_{i, j}^n - \tau_{i, j}^{sx, n} \\ + A_h \frac{2}{(\Delta s')^2} (U_{i-1, j}^n + U_{i, j-1}^n - 4U_{i, j}^n + U_{i, j+1}^n + U_{i+1, j}^n)$$

$$b) \beta_{i, j}^n = -\frac{gH}{\Delta s'} \left(\zeta_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} - \zeta_{i-1/2, j-1/2}^{n+1/2} \right) - BV_{i, j}^n - \tau_{i, j}^{sy, n} \\ + A_h \frac{2}{(\Delta s')^2} (V_{i-1, j}^n + V_{i, j-1}^n - 4V_{i, j}^n + V_{i, j+1}^n + V_{i+1, j}^n)$$

wobei $\Delta s' = \sqrt{2} \Delta x = \sqrt{2} \Delta y = \sqrt{2} \Delta s$ und Δs die Gitterbreite des nicht-rotierten Systems bedeutet.

Die Scherungsgleichungen haben eine zu (A1.3-1) fast identische Form und werden ebenso diskretisiert.

Die Diskretisierung der Dichteerhaltungsgleichung wird am einfachen Beispiel der Gleichung

$$(A1.3-6) \quad \varrho_t + u_0 \varrho_x - A \varrho_{xx} = 0$$

erklärt. Entweder wird das bekannte Verfahren von Lax-Wendrow auf den Advektionsteil und eine Vorwärtsintegration auf den Diffusionsteil angewendet oder aber das folgende vereinfachte Prinzip:

$$(A1.3-7) \quad \vartheta_j^* = \vartheta_j^n + \Delta t A \delta_x^2 \vartheta_j^n \quad (\text{Diffusion})$$

$$\vartheta_j^{n+1} = \vartheta_j^* - \Delta t u_0 \delta_x \vartheta_j^n \quad (\text{Advektion})$$

$$\text{mit } \delta_x \vartheta_j = (\vartheta_{j+1} - \vartheta_{j-1}) / 2\Delta x \text{ und } \delta_x^2 \vartheta_j = (\vartheta_{j-1} - 2\vartheta_j + \vartheta_{j+1}) / (\Delta x)^2.$$

Zur Aufstellung der für die Stabilität notwendigen Kriterien der Schemata (A1.3-4) und (A1.3-7) wird der Wellenansatz

$$(A1.3-8) \quad \psi_{\ell,j}^n = \lambda^n q^{\ell} r^j$$

$$\text{mit } \lambda = e^{i\omega \Delta t}, q = e^{i\kappa \Delta x} \text{ und } r = e^{i\eta \Delta x}$$

verwendet. Einsetzen in die Differenzengleichungen (A1.3-4) ergibt die charakteristische Gleichung:

$$(A1.3-9)$$

$$(\lambda-1) \left\{ \left[\lambda - \frac{1-\vartheta^2}{1+\vartheta^2} + \frac{R}{1+\vartheta^2} \right]^2 + \frac{(2-R)\vartheta^2}{(1+\vartheta^2)^2} \right\} + \frac{2K}{1+\vartheta^2} (\lambda-1+R) \lambda = 0$$

mit

$$K = gH \left(\frac{\Delta t}{\Delta s} \right)^2 \sigma'^2, \quad \vartheta = \frac{\Delta t \cdot f}{2}$$

$$R = \Delta t \left(\frac{4A_h}{(\Delta s)^2} \sigma'^2 + B \right), \quad \lambda = e^{i\omega \Delta t}$$

und

$$\sigma'^2 = \sin^2(\kappa \frac{\Delta s}{2}) + \sin^2(\eta \frac{\Delta s}{2}) \leq 2$$

$$\sigma'^2 = \sin^2(\kappa' \frac{\Delta s'}{2}) + \sin^2(\eta' \frac{\Delta s'}{2}) \leq 2.$$

Dabei ist B der Bodenreibungskoeffizient für die Berechnung der Schubspannung $\tau^b = Bv$; $\kappa, \eta, \Delta s$ sind Wellenzahlen und Gitterabstand im x,y-System; $\kappa', \eta', \Delta s'$ entsprechend im 45°- gedrehten x',y'-System.

Die Lösungen des kubischen Polynoms (A1.3-9) lauten für den Fall $R = 0$, $\vartheta \neq 0$ und $|\lambda| \leq 1$

$$(A1.3-10) \quad \begin{aligned} \lambda_{1,2} &= a \pm i \sqrt{1-a^2} && (\text{Schwerewellen}) \\ \lambda_3 &= 1 && (\text{Rossbywellen}) \end{aligned}$$

mit $a = \frac{1-\mathcal{V}^2-K}{1+\mathcal{V}^2}$. Die Bedingung $|\lambda_3| \leq 1$ ist immer erfüllt,

die Bedingung $|\lambda_{1,2}| \leq 1$ kann nur erfüllt werden, wenn $a \leq 1$ ist, d.h. wenn gilt

$$(A1.3-10a) \quad \left(\frac{\Delta t}{\Delta s}\right)^2 gH\sigma'^2 \leq 2 - \left(\frac{\Delta t-f}{2}\right)^2.$$

Im Fall $f=0$ und $\sigma'^2 = 2$ ergibt sich die bekannte Courant-Friedrich-Levy-Bedingung.

$\sigma'^2 = 2$ erhält man für $\mathcal{X}' = \eta' = \pi/\Delta s' = \pi/\sqrt{2}\Delta s$, d.h. die strengste Schranke rührt von den $2\Delta s'$ -Wellen her.

Im Fall $\mathcal{V}=0$ und $R \neq 0$ erhält man für $|\lambda| \leq 1$

$$(A1.3-11) \quad \begin{aligned} \lambda_{1,2} &= b \pm i \sqrt{1-R-b^2} && (\text{Schwerewellen}) \\ \lambda_3 &= 1-R && (\text{Rossbywellen}) \end{aligned}$$

mit $b = 1 - (K + R/2)$.

Die Bedingung $|\lambda_3| \leq 1$ führt auf die Schranke $|1-R| \leq 1$, d.h. auf $R \leq 2$ bzw.

$$(A1.3-11a) \quad \Delta t \left(\frac{4A_h}{(\Delta s)^2} \sigma'^2 + B \right) \leq 2,$$

während die Bedingung $|\lambda_{1,2}| \leq 1$ zusammen mit der Einschränkung $R + b^2 \leq 1$, die nur für gewisse σ' gilt, auf die Beziehung

$$(A1.3-11b) \quad \left(\frac{\Delta t}{\Delta s} 2gH\sigma'^2 + \frac{4A_h}{\Delta s} \sigma'^2 + B \Delta s \right)^2 \leq 8c^2\sigma'^2$$

mit der Nebenbedingung $\sigma' \geq \sigma'_s = \sqrt{\frac{2}{gH}} \left(\frac{2A_h}{\Delta s} \sigma'^2 + \frac{B}{2} \Delta s \right)$ führt. Für $\sigma' \leq \sigma'_s$ gilt wieder (A1.3-11a).

Im ungünstigsten Fall gelten die durch (1.3.3-1) bis (1.3.3-3) ausgedrückten Schranken.

Weiterhin sieht man, daß das Differenzenschema keinerlei numerische Dämpfung enthält. Die durch $R \neq 0$ bewirkte physikalische Dämpfung drückt sich durch die Beziehung $|\lambda_{1,2}| = |1-R|^{1/2}$ (Schwerewellen) und durch $|\lambda_3| = |1-R|$ (Rossbywellen) aus, d.h. die quasi-geostrophischen Vorgänge werden stärker gedämpft.

Der Diskretisierungsfehler an der Frequenz ω läßt sich durch Vergleich der kontinuierlich berechneten Frequenz $\omega_A = \omega_A^r + i\omega_A^i$ mit der numerisch berechneten $\omega_N = \omega_N^r + i\omega_N^i$ feststellen. Wegen $\lambda = e^{i\omega_N \Delta t}$ folgt:

$$(A1.3-12a) \quad \omega_N^r = \frac{1}{\Delta t} \arctan \left(\frac{\lambda_{im}}{\lambda_{re}} \right)$$

$$(A1.3-12b) \quad \omega_N^i = -\frac{1}{\Delta t} \ln |\lambda|.$$

Für λ kann z.B. λ_1 aus (A1.3-11) eingesetzt werden. Durch Vergleich mit der speziellen analytischen Lösung

$$(A1.3-13a) \quad \omega_A^r = \sqrt{gH(\alpha^2 + \eta^2) - R_A^{*2}}$$

$$(A1.3-13b) \quad \omega_A^i = R_A^* \text{ mit } R_A^* = \frac{1}{2} \left\{ A_h (\alpha^2 + \eta^2) + B \right\}$$

folgt die für viele Differenzenschemata bekannte Tatsache (Grotjahn und O'Brien, 1976), daß die Wellen mit wachsenden Wellenzahlen verlangsamt werden ($\omega_A^r > \omega_N^r$).

Das Verhältnis des numerischen Dämpfungsfaktors ω_N^i zum analytischen ω_A^i beträgt für λ_1

$$(A1.3-14) \quad \frac{\omega_N^i}{\omega_A^i} = \frac{-\frac{1}{2\Delta t} \ln \left| 1 - \Delta t [4A_h \sigma / \Delta s + B] \right|}{1/2 \left\{ A_h (\alpha^2 + \eta^2) + B \right\}}.$$

Ist Δt bzw. A_h, B nicht zu groß, so kann man schreiben

$$(A1.3-15) \quad \frac{\omega_N^i}{\omega_A^i} = \frac{A_h \left\{ \sin^2 \alpha \frac{\Delta s}{2} + \sin^2 \eta \frac{\Delta s}{2} \right\}}{A_h (\alpha^2 + \eta^2) + B} / (\Delta s/2)^2 + B .$$

Daraus sieht man im Falle $A_h \neq 0$, daß die Differenzenapproximation die gewollte physikalische Dämpfung unterschreitet, d.h. $\omega_N^i \leq \omega_A^i$.

Bei der Behandlung der Gleichung $\rho_t + u_0 \rho_x - A \rho_{xx} = 0$ führt der Wellenansatz (A1.3-7) auf die charakteristische Gleichung

$$(A1.3-16) \quad \lambda = (1 - 4 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \frac{A}{\sin^2 \alpha \frac{\Delta x}{2}}) (1 - i \frac{\Delta t}{\Delta x} u_0 \sin \alpha \Delta x),$$

wobei Δt der "interne" Zeitschritt bedeutet.

Aus (A1.3-16) folgt

$$(A1.3-17) \quad |\lambda| = \left| 1 - 4 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \frac{A}{\sin^2 \alpha \frac{\Delta x}{2}} \right| \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} u_0 \sin \alpha \Delta x \right)^2} .$$

Die Stabilitätsforderung $|\lambda| \leq 1$ erlegt $\Delta t, \Delta x, u_0, A$ Beschränkungen auf.

Das Differenzenschema verzögert ebenfalls, denn

$$(A1.3-18) \quad \frac{\omega_N^r}{\omega_A^r} = \frac{\frac{1}{\Delta t} \arctan \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} u_0 \sin \alpha \Delta x \right)}{\alpha u_0} \leq 1 .$$

Das Verhältnis ω_N^i / ω_A^i ist für $u_0 = 0$ ebenfalls < 1 , d.h. die physikalische Diffusion wird durch die Numerik abgeschwächt, für $u_0 > 0$ jedoch wieder verstärkt ($\omega_A^i = \alpha^2 A$).

Stereographische Abbildung der Ostsee

Bezeichnet φ_0, λ_0 das Zentrum der Ostsee, so wird vom Diametralpunkt auf der Erdkugel die Ostsee auf eine im Punkte φ_0, λ_0 berührende Tangentialebene stereographisch projiziert.

Ist $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ das im Punkte φ_0, λ_0 auf der Tangentialebene befindliche Rechtssystem mit \hat{z} als Projektionsachse und \hat{x} entlang $\lambda = \lambda_0$, so folgt nach einiger Rechnung (mit $r = \text{Erdradius}$):

(A1.3.5-1)

$$\begin{aligned}\hat{x} &= r \{ \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0) - \sin \varphi \cos \varphi_0 \} \\ \hat{y} &= r \{ \cos \varphi \sin(\lambda - \lambda_0) \} \\ \hat{z} &= r \{ \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0) + \sin \varphi \sin \varphi_0 - 1 \} .\end{aligned}$$

Ist x, y ein Koordinatensystem auf der Tangentialebene mit x nach Osten, y nach Süden und Ursprung in φ_0, λ_0 , so folgt durch die stereographische Projektion

$$(A1.3.5-2) \quad y = \frac{2r\hat{x}}{2r+\hat{z}} \quad ; \quad x = \frac{2r\hat{y}}{2r+\hat{z}}$$

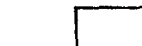

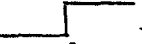

Modell Wind/Reibung	GEDSER	KUNGSHOLM FORT	YSTAD	HANKO	HAMINA	Mittel
 $\bar{\mu} = 20$	0.48±0.25	0.70±0.23	0.69±0.15	0.41±0.06	0.42±0.09	0.54±0.22
quasi-linear 40	0.69±0.15	0.71±0.13	0.76±0.11	0.57±0.05	0.54±0.09	0.65±0.14
80	0.99±0.22	0.99±0.21	0.99±0.24	0.81±0.08	0.80±0.09	0.92±0.25
 20	0.65±0.36	0.66±0.19	0.68±0.17	0.40±0.11	0.43±0.08	0.56±0.25
quasi-linear 40	0.69±0.16	0.68±0.21	0.74±0.13	0.55±0.08	0.55±0.07	0.64±0.16
80	0.90±0.23	0.85±0.29	0.89±0.32	0.80±0.07	0.79±0.06	0.85±0.23
 $b' = 1.25$	0.33±0.27	0.60±0.21	0.54±0.16	0.28±0.06	0.38±0.10	0.42±0.20
quadra- 2.50	0.44±0.25	0.56±0.08	0.59±0.05	0.40±0.05	0.47±0.10	0.49±0.12
tisch $b' = 10^3 b$ 5.00	0.61±0.25	0.75±0.07	0.72±0.14	0.49±0.03	0.60±0.12	0.63±0.17
 1.25	0.33±0.12	0.65±0.44	0.68±0.25	0.23±0.04	0.30±0.07	0.56±0.25
quadra- 2.50	0.46±0.18	0.57±0.24	0.60±0.09	0.32±0.07	0.36±0.08	0.64±0.16
tisch 5.00	0.58±0.24	0.57±0.26	0.59±0.13	0.35±0.10	0.44±0.07	0.85±0.23
Neumann (1941)	0.52±0.42	0.78±0.16	0.48±0.31	0.47±0.23	0.75±0.21	0.58±0.28

Tabelle 1 (siehe Text 2.1.1)

Dämpfungsraten für Seiches der Ostsee bei unterschiedlicher Reibung

ANHANG A2

Vergleich von Windeffekt und kombinierten Effekt von Schichtung und Topographie

Tabelle 2

MODELLRECHNUNG	TERM [10 ⁻¹⁰ s ⁻²]	MIN	MAX	MIT	DEV	AMIT	ADEV
("Südwind")	$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau^y}{\rho_0} \right) \right]_z$	-5.00	7.66	0.087	0.72	0.43	0.58
("Westwind")	$\left[- \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau^x}{\rho_0} \right) \right]_z$	-6.87	7.85	-0.033	0.83	0.45	0.70
3 Tage Südwind	$[V \times \bar{P}_i]_z$	-3.02	4.30	0.022	0.38	0.22	0.33
4 Tage Südwind	dito	-3.59	4.86	0.028	0.46	0.24	0.39
4 Tage Westwind	dito	-2.77	2.57	-0.002	0.33	0.17	0.28
	[10 ⁻⁶ cm/s ²]						
4 Tage Südwind	$[V \times \bar{H} \bar{P}_i]_z$	-2.23	2.66	0.010	0.34		
4 Tage Westwind	dito	-3.55	3.20	-0.007	0.32		

MIN = Minimaler Wert
 MAX = Maximaler Wert
 MIT = Mittelwert
 DEV = Standardabweichung
 AMIT = Mittelwert des Absolutbetrages
 ADEV = Standardabweichung des Absolutbetrages

ANHANG A2

	Referenzsimulation				$A_h = 10^7$		$\alpha = 40^\circ$	
MESSUNG	σ_{gem}	σ_{mod}	r	S	σ_{mod}	r	σ_{mod}	r
<u>Gedser</u>	17.5	15.9	0.536	0.15	15.5	0.543	15.6	0.546
<u>Ystad</u>	13.5	11.1	0.579	0.28	11.0	0.580	10.5	0.602
<u>Landsort</u>	7.2	7.9	0.640	0.20	7.8	0.641	8.0	0.630
<u>Furuögrund</u>	13.8	12.9	0.266	---	12.7	0.284	13.4	0.238
<u>Kemi</u>	14.1	16.9	0.662	0.15	16.6	0.665	17.3	0.661
<u>Vaasa</u>	11.5	11.4	0.803	0.61	11.2	0.817	11.6	0.791
<u>Rauma</u>	10.1	9.3	0.856	0.72	9.4	0.858	9.5	0.844
<u>Turku</u>	10.9	9.5	0.831	0.69	9.4	0.834	9.7	0.819
<u>Helsinki</u>	12.6	11.9	0.824	0.66	11.7	0.827	12.0	0.817
<u>Pos. 1 u</u>	5.6	3.5	0.494	0.23	2.4	0.566	3.4	0.478
<u>" v</u>	6.1	4.1	0.388	0.07	3.5	0.348	3.8	0.444
<u>" u </u>	3.9	3.0	0.866	0.71	2.7	0.835	3.0	0.864
Anzahl effektiver Freiheitsgrade ≈ 50 . Signifikanzschwelle $r(99\%) = 0.350$								

Tabelle 3

ANHANG A3

Streuung von Beobachtung (σ_{gem}) und Modell (σ_{mod}), Korrelationen (r) und Geschicklichkeitskoeffizient (S) der Fluktuationen.

6. Literatur

- AMBJÖRN, C. und GIDHAGEN, 1979: Vatten- och materialtransporter mellan Bottniska Viken och Östersjön. SMHI Rapp. Hydrol. Oceanogr. RHO 19: 52 pp.
- BEHRENDT, J., 1976: Der Zusammenhang zwischen wahren und geostrophischem Wind über der Ostsee während BALTIC'75. Ber. Inst. Meereskd. Kiel No. 27
- BENNET, J.R., 1974: On the dynamics of wind-driven lake currents. J. Phys. Oceanogr. 4: 400-414
- BIRCHFIELD, G.E., 1967: Horizontal transport in a rotating basin of parabolic depth profile. J. Geophys. Res. 72: 6155-6163
- BIRCHFIELD, G.E. und B.P. HICKIE, 1977: The time-dependent response of a circular basin of variable depth to a wind stress. J. Phys. Oceanogr. 7: 691-701
- BOLIN, B., 1953: The adjustment of a non-balanced velocity field towards geostrophic equilibrium in a stratified fluid. Tellus, 5: 373-385
- BOOK, D.L., J.P. BORIS und K. HAIN, 1975: Flux-corrected transport II: Generalization of the method. J. Comp. Phys., 18: 248-283
- BRYAN, K., 1969: A numerical method for the study of ocean circulation. J. Comp. Phys. 4: 347-376
- BUCH, E. und KULLENBERG, 1980: On mixing conditions in the Baltic transition area. Inst. Phys. Oceanogr., University of Copenhagen (draft).
- CAHN, A., 1945: An investigation of the free oscillations of a simple current system. J. Meteor., 2: 113-119
- CAMERLENGO, A.L. und J.J. O'BRIEN, 1980: Open boundary conditions in rotating fluids. J. Comp. Phys. 35: 12-35
- COURANT, R. und K.O. FRIEDRICHS, 1948: Supersonic flow and shock waves. Wiley-Interscience, New York.
- COURANT, R. and D. HILBERT, 1962: Methods of mathematical physics. Vol. II. Partial differential equations. Wiley-Interscience, New York. 830 pp.

- CSANADY, G.T. und J.T. SCOTT, 1974: Baroclinic coastal jets in Lake Ontario during IFYGL. J. Phys. Oceanogr. 4: 524-541
- CSANADY, G.T., 1976: Topographic waves in Lake Ontario. J. Phys. Oceanogr. 6: 93-103
- CSANADY, G.T., 1977: Intermittent 'full' upwelling in Lake Ontario. J. Geoph. Res. 82: 397-419
- DAVIS, R.E., 1976: Predictability of sea surface temperature and sea level pressure anomalies over the North Pacific Ocean. J. Phys. Oceanogr., 6: 249-266
- DIETRICH, G., 1951: Oberflächenströmungen im Kattegat, im Sund und in der Beltsee. Dt. hydrogr. Z. 4: 129-150
- DIETRICH, G. und F. SCHOTT, 1974: Wasserhaushalt und Strömungen. In: Meereskunde der Ostsee, Editor L. Magaard und G. Rheinheimer, Springer, Heidelberg, 269 pp.
- ECKART, C., 1960: Hydrodynamics of oceans and atmospheres. Pergamon Press, New York.
- ELVIUS, T. and A. SUNDSTRÖM, 1973: Computationally efficient schemes and boundary conditions for a fine-mesh barotropic model based on the shallow-water equations. Tellus, 25: 132-156
- FJELSTAD, J.E., 1958: Ocean currents as an initial problem. Geofys. Publ. 20,7: 1-24
- FONSELIUS, S.H., 1970: On the stagnation and recent turnover of the water in the Baltic. Tellus 22: 533-543
- GARRATT, J.R., 1977: Review of drag coefficients over oceans and continents. Mon. Wea. Rev. 105: 915-929
- GHIL, M., 1975: The initialization problem in numerical weather prediction. In: Improperly posed boundary value problems, 105-123. Carasso, A. und A.P. Stone (Ed.). Pitman Publ. Comp. London.
- GREENSPAN, H.P., 1968: The theory of rotating fluids. Cambridge University Press, 327 pp.
- GROTJAHN, R. und J. O'BRIEN, 1976: Some inaccuracies in finite differencing hyperbolic equations. Mon. Wea. Rev. 104: 180-194

- HAGEN, E., 1977: Zur Problematik mesoskaliger Verwirbelungen in den Schilfgebieten des küstennahen Kaltwasserauftriebs. Beitr. Meereskunde, 39: 61-87
- HALTINER, G.J., 1971: Numerical weather prediction. John Wiley & sons, London, 317 pp.
- HANEY, R.L., 1974: A numerical study of the response of an idealized ocean to large-scale surface heat and momentum flux. J. Phys. Oceanogr., 4: 145-167
- HARDTKE, P.G., 1980: Unveröffentlicht.
- HARRISON, D.E., 1978: On the diffusion parametrization of mesoscale eddy effects from a numerical ocean experiment. J. Phys. Oceanogr., 8: 913-918
- HASSE, L., 1974: On the surface to geostrophic wind relationship at sea and the stability dependence of the resistance law. Beitr. Phys. Atmosph. 47: 45-55
- HEAPS, N.S. und J.E. Jones, 1975: Storm surge computations for the Irish Sea using a 3-dimensional numerical model. Mem. Soc. Roy. Sci. Liège, Coll. 6: 289-233
- HOLLAND, W.R., 1978: The role of mesoscale eddies in the general circulation of the ocean; numerical experiments using a wind-driven quasi-geostrophic model. J. Phys. Oceanogr. 8: 363-392
- HOUGH, S.S., 1898: On the application of harmonic analysis to the dynamical theory of tides. Part II. On the general integration of Laplace's dynamical equations. Philos. Trans. R. Soc. London, A, 191: 139-185
- HSUEH, Y. und CHI-YNAN LEE, 1978: A hindcast of barotropic response over the Oregon-Washington continental shelf during the summer of 1972. J. Phys. Oceanogr., 8: 799-810
- JACOBSEN, T., 1976: Praeliminaere transportberegninger i Store Bælt. Miljøstyrelsen Bæltprojektet Juli 1976: Fysiske Undersøgelser, 53-61
- JANJIC, Z.I., 1974: A stable centered difference scheme free of two-grid interval noise. Mon Wea. Rev., 102: 319-323
- JANKOWSKI, A. und Z. KOWALIK, 1978: Wind-driven currents and river inflow circulation in the homogeneous Baltic Sea. Proc. 11th Conf. Baltic Oceanogr., Vol. 2: 469-514

- JEFFREY, A., 1976: Quasilinear hyperbolic systems and waves.
Research notes in mathematics. London Pitman Publishing. 229 pp.
- JELESNIANSKI, C.P., 1967: Numerical computations of storm
surges with bottom stress. Mon. Wea. Rev. 95: 740-756
- KAMENKOVICH, V.M., 1977: Fundamentals of ocean dynamics.
Elsevier Scientific Publishing Company Oxford, 249 pp.
- KEUNECKE, K.H. und H. KOHN, W. KRAUSS, G. MIOGA, F. SCHOTT,
P. SPETH, J. WILLEBRAND, W. ZENK, 1975: Baltic'75, Phy-
sikalischer Teil. Messungen des IFM, der FWG und der DFVLR.
Ber. Inst. Meereskd. Kiel No. 11
- KEUNECKE, K.H. und L. MAGAARD, 1975: Measurements by means of
towed thermistor cables and problems of their interpreta-
tion with respect to mesoscale processes. Mem. Soc. Roy.
Sci. Liège, Coll. 7: 147-160
- KIELMANN, J., W. KRAUS und K.H. KEUNECKE, 1973: Currents and
stratification in the Belt Sea and the Arkona Basin during
1962-1968. Kieler Meeresf. XXIX, 90-111
- KIELMANN, J., 1976: Numerical modelling in connection with
BALTIC'75. Proc. 10th Conf. Baltic Oceanogr., Pap. No. 23
- KIELMANN, J., J. HOLTORFF und U. REIMER, 1976: Data report
BALTIC'75. Ber. Inst. Meereskd. Kiel No. 26
- KIELMANN, J., 1978: Mesoscale eddies in the Baltic. Proc. 11th
Conf. Baltic Oceanogr., Vol. 2: 729-755
- KIELMANN, J. und Z. KOWALIK, 1980: A bottom stress formulation
for storm surge problems. Oceanol. Acta, 3: 51-58
- KOCHERGIN, V.P. und V.I. KLIMOK, 1971: Effect of bottom relief
on oceanic circulation. Izv. Akad. Nauk. Atmos. Oceanic
Phys. 7: 885-891
- KOOP, D., 1974: Wind generated sea level fluctuations in the
Baltic. A comparison between measured and calculated gauges
from October 13-20, 1967. ICES special meeting on models of
water circulation in the Baltic, Pap. No. 12
- KOWALIK, Z., 1969: Wind-driven circulation in a shallow sea
with application to the Baltic Sea. Acta Geoph. Pol., 17:
13-37

- KOWALIK, Z., 1972: Wind-driven circulation in a shallow stratified sea. Dt. hydrogr. Z. 25: 265-278
- KOWALIK, Z. und S. TARANOWSKA, 1974: Density currents in the Baltic. Oceanologia 3: 5-31
- KOWALIK, Z. und A. STAŚKIEWICZ, 1976: Diagnostic model of the circulation in the Baltic Sea. Dt. hydrogr. Z. 29: 239-250
- KRAUß, W. und L. MAGAARD, 1962: Zum System der Eigenschwingungen der Ostsee. Kieler Meeresforsch. 18: 184-186
- KRAUß, W., 1966: Methoden und Ergebnisse der Theoretischen Ozeanographie. Bd. II. Interne Wellen. Gebr. Bornträger, Berlin, 248 pp.
- KRAUß, W., 1973: Methods and results of theoretical oceanography. Vol. 1. Dynamics of the homogeneous and quasihomogeneous ocean. Gebrüder Bornträger, Berlin, 302 pp.
- KRAUß, W., 1976: On currents, internal and inertial waves in a stratified ocean due to variable winds. Part 2. Dt. hydrogr. Z. 29: 119-135
- KRAUß, W., 1978: The response of a stratified viscous sea to moving meteorological fronts and squall lines. Dt. hydrogr. Z. 31: 16-30
- KRAUß, W., 1979a: A semi-spectral model for the computation of mesoscale processes in a stratified channel of variable depth. Dt. hydrogr. Z. 32: 173-189
- KRAUß, W., 1979b: Inertial waves in an infinite channel of rectangular cross section. Dt. hydrogr. Z. 32: 248-266
- KRAUß, W., 1980: The erosion of a thermocline. Manuskript IFM Kiel. Erscheint in J. Phys. Oceanogr., April 1981
- KREISS, H. and J. OLIGER, 1973: Methods for the approximate solution of time dependent problems. GARP Publication Series #10
- KUHN, H., 1980: Persönliche Mitteilung.
- LADYZHENSKAYA, O.A., 1963: The mathematical theory of viscous incompressible flow. Gordon and Breach, London, 184 pp.
- LAM, D.C.L., 1977: Comparison of finite - element and finite difference methods for nearshore advection - diffusion transport models. In: Finite elements in water resources, 115-129. Pentech. Press, London.
- LANGE, W., 1975: Zu den Ursachen langperiodischer Strömungsänderungen im Fehmarnbelt. Kieler Meeresf. 31: 65-81

- LASKA, M., 1966: The prediction problem of storm surges in the southern Baltic based on numerical calculations. (poln.) Arch. Hydrotechn., Warsz. 13: 335-366
- LeBLOND, P.H. und L.A. MYSAK, 1978: Waves in the ocean. Elsevier Sci. Publ. Comp. Amsterdam, 602 pp.
- LENZ, W., 1971: Monatskarten der Temperatur der Ostsee, dargestellt für verschiedene Tiefenhorizonte. Dt. hydrogr. Z. Ergänzungsheft B(4), No.11
- LIEBING, H., 1976: Grundlagen zur objektiven Ermittlung eines Bodenluftdruckfeldes für ein begrenztes Gebiet (Ostsee). Ber. Inst. Meereskd. Kiel No. 24
- LONGUET-HIGGINS, M.S., 1964: Planetary waves on a rotating sphere. Proc. R. Soc. London, A, 279: 446-473
- LONGUET-HIGGINS, M.S., 1965: Planetary waves on a rotating sphere II. Proc. R. Soc. London, A, 284: 40-68
- MAGAARD, L., 1968: Ein Beitrag zur Theorie der internen Wellen als Störungen geostrophischen Strömungen. Dt. hydrogr. Z. 21: 242-278
- MAGAARD, L. und G. RHEINHEIMER, 1974: Meereskunde der Ostsee. Springer Verlag, Berlin, 269 pp.
- MATTHÄUS, W., 1977: Mittlere vertikale Wärmeaustauschkoeffizienten in der Ostsee. Acta Hydrophysica 22: 73-92
- MATTHÄUS, W., 1979: Mittlere thermische Schichtungsverhältnisse im Oberflächenwasser der offenen Ostsee. Beitr. Meeresk. 42: 123-131
- MESINGER, F. und A. ARAKAWA, 1976: Numerical methods used in atmospheric models. Vol. 1. GARP Publication Series No.17, 64 pp.
- MURTHY, C.R., 1975: Horizontal diffusion characteristics in Lake Ontario. J. Phys. Oceanogr. 6: 76-84
- MYSAK, L.A., 1980: Topographically trapped waves. Ann. Rev. Fluid Mech. 12: 45-76
- NEUMANN, G., 1941: Eigenschwingungen der Ostsee. Arch. Dtsch. Seewarte u. Marineobs., 61: 1-59

- NIHOUL, J.C.J., 1977: Three-dimensional model of tides and storm surges in a shallow well-mixed continental sea. *Dyn. Atmos. Oceans*, 2: 29-47
- NIHOUL, J.C.J., 1979 (ed.): Marine forecasting. Predictability and modelling in ocean hydrodynamics. Proc. 10th Intern. Liège Coll. on ocean hydrodynamics. Elsevier, Amsterdam, 493 pp.
- O'BRIEN, J.J., 1975: Models of coastal upwelling. In: Numerical models of ocean circulation. Washington D.C., Nat. Acad. Sci., 204-215
- OKUBO, A., 1971: Oceanic diffusion diagrams. *Deep Sea Res.* 18: 789-802
- OLIGER, J. and A. SUNDSTRÖM, 1976: Theoretical and practical aspects of some initial-boundary value problems in fluid dynamics. Computer Science Department, Stanford University STAN-CS-76-578
- ORLANSKI, I., 1976: A simple boundary condition of unbounded hyperbolic flows. *J. Comp. Phys.*, 21: 251-269
- PASCHEN, W., 1980: Das Nestling-Problem in meteorologischen Modellen. *Hamburger Geoph. Einzelschr. Reihe A*, Heft 45, 83 pp.
- PEARSON, R.A., 1974: Consistent boundary conditions for numerical models of systems that admit dispersive waves. *J. Atm. Sci.* 31: 1481-1489
- PEDLOSKY, J., 1979: Geophysical fluid dynamics. Springer Verlag Berlin, 624 pp.
- PLATZMANN, G.W., 1963: The dynamic prediction of wind tides on Lake Erie. *Meteorol. monographs* 4, No. 26, 44 pp.
- POND, S. und K. BRYAN, 1976: Numerical models of the ocean circulation. *Rev. Geoph. and Space Phys.* 14: 243-263
- RAMMING, H.-G. und Z. KOWALIK, 1980: Numerical modelling of marine hydrodynamics. Elsevier Oceanographic Series, 26: 367 pp.
- RAO, D.B., 1967: Response of a lake to a time-dependent wind stress. *J. Geophys. Res.* 72: 1697-1708

- RHINES, P.B., 1970: Edge-, bottom-, and Rossby waves in a rotating stratified fluid. *Geophys. Fluid Dyn.* 1: 273-302
- ROSSBY; C.G., 1938: On the mutual adjustment of pressure and velocity distribution in certain simple current systems, II. *J. Marine Res.*, 239-263
- SARKISYAN, A.S., A. STĄSKIEWICZ and Z. KOWALIK, 1975: Diagnostic computation of the summer circulation in the Baltic Sea. *Oceanologica*, 15: 653-656
- SAUER, R. und I. SZABÓ, 1969: Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs. Teil 2. Springer Verl., Berlin, 684 pp.
- SCHOTT, F., M. EHLERS, L. HUBRICH und D. QUADFASEL, 1978: Small scale diffusion experiments in the Baltic surface-mixed layer under different weather conditions. *Dt. hydrogr. Z.* 31: 195-215
- SCHULMAN, E.E., 1972: A study of topographic effects. In: *Numerical models of ocean circulation*. Washington D.C., 1975. *Nat. Acad. Sci.*, 147-167
- SCHWEIMER, M., 1978: Physikalisch-ozeanographische Parameter in der westlichen Ostsee. - Eine Literaturstudie -. Ber. Inst. f. Meereskunde, Universität Kiel, No. 61
- SIMONS, T.J., 1973: Development of three-dimensional numerical models of the Great Lakes. *Can. Inland Waters Branch, Sci. Ser.* 12: 26 pp.
- SIMONS, T.J., 1974: Verification of numerical models of Lake Ontario. 1. Circulation in spring and early summer. *J. Phys. Oceanogr.* 4: 507-523
- SIMONS, T.J., 1975: Verification of numerical models of Lake Ontario. 2. Stratified circulation and temperature changes. *J. Phys. Oceanogr.* 5: 98-110
- SIMONS, T.J., 1976: Topographic and baroclinic circulation in the southwest Baltic. *Ber. Inst. Meereskd. Kiel* No. 25
- SIMONS, T.J., 1978: Wind-driven circulations in the southwest Baltic. *Tellus* 30: 272-283

- SIMONS, T.J., 1980: Circulation models of lakes and inland seas. Canad. Bull. Fisheries and Aquatic Sciences. Bull. 203: 146 pp.
- SUNDSTRÖM, A., 1977: Boundary conditions for limited-area integration of the viscous forecast equations. Beitr. Phys. Atm. 50: 218-224
- SOSKIN, I.M., L.N. KUZNETSOVA und V.M. SOLOVYEV, 1963: Currents of the Baltic Sea on the basis of an analysis of hydrologic observations by the dynamic method. Trudy Gosudarstven. okeanogr. inst. No. 73
- STRUVE, S., 1978: Transport und Vermischung einer passiven Beimengung in einem Medium mit einem vorgegebenen Geschwindigkeitsfeld. Ber. Inst. f. Meereskunde Kiel No. 57
- SVANSSON, A. und J. SZARON, 1974: Computation of current-profiles in a barotropic canal-model. ICES special meeting 1974 on models of water circulation in the Baltic.
- TURNER, J.S., 1973: Buoyancy effects in fluids. Cambridge monographs on mechanics and applied mechanics. Cambridge University Press.
- UUSITALO, S., 1960: The numerical calculation of wind effect on sea level elevations. Tellus 12: 427-435
- UUSITALO, S., 1971: Numerical investigations of the influence of wind on water levels and currents in the Gulf of Bothnia: A preliminary experiment. Merentutkimuslait. Julk. 235: 25-68
- WALIN, G., 1972: Some observations of temperature fluctuations in the coastal region of the Baltic. Tellus 24: 187-198
- WEENINK, M.P.H., 1958: A theory and method of calculation of wind effects on sea levels in a partly enclosed sea, with special application to the southern coast of the North Sea. Mededeling. Verhandelg. No. 73

- WELANDER, P., 1968: Wind-driven circulation in one- and two-layer oceans of variable depth. *Tellus* 20: 1-15
- WELANDER, P., 1974: Two-layer exchange in an estuary basin, with special reference to the Baltic Sea. *J. Phys. Oceanogr.* 4: 542-556
- WENZEL, M., 1978: Interpretation der Wirbel im Bornholmbecken durch topographische Wellen in einem Kreisbecken. Diplomarbeit Inst. f. Meereskunde Kiel.
- WESSEL, L., 1971: Havsströmmar. Särtryck av bilaga 4 ur Instruktion för stridstjänsten vid flottan, Ubåtsjakt, Hydrografi (ISF Ubj: Hydro) Stockholm, 50 pp.
- WILLEBRAND, J., 1978: Temporal and spacial scales of the wind field over the North Pacific and North Atlantic. *J. Phys. Oceanogr.* 8: 1080-1094
- WILLEBRAND, J., S.G.H. PHILANDER und R.C. PACANOWSKI, 1980: The oceanic response to large-scale atmospheric disturbances. *J. Phys. Oceanogr.* 10: 411-429
- WILMOT, W., 1974: A numerical model of the gravitational circulation in the Baltic. ICES special meeting 1974 on models of water circulation in the Baltic.
- WÜBBER, Ch. und W. KRAUß, 1979: The two-dimensional seiches of the Baltic Sea. *Oceanol. Acta* 2: 435-446
- WÜST, G. und W. BROCKMUS, 1955: Ozeanographische Ergebnisse einer Untersuchungsfahrt mit Forschungskutter "Südfall" durch die Ostsee Juni / Juli 1954. *Kieler Meeresforsch.* 11: 3-21
- WURTELE, M.G., J. PAEGLE and A. SIELECKI, 1971: The use of open boundary conditions with the storm-surge equations. *Mon. Wea. Rev.*, 99: 537-544

7. Abbildungen

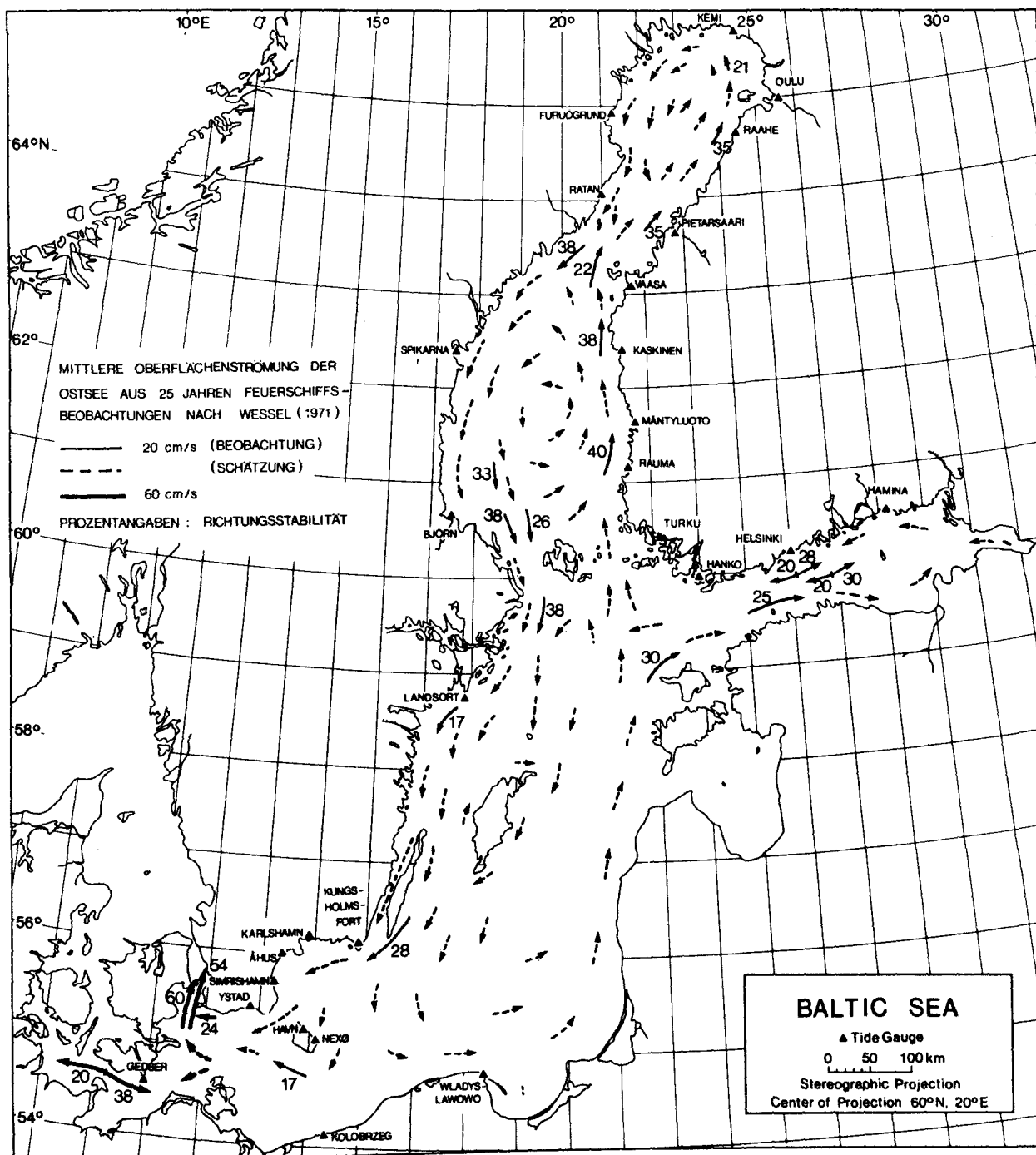


Abb. 0.0-1

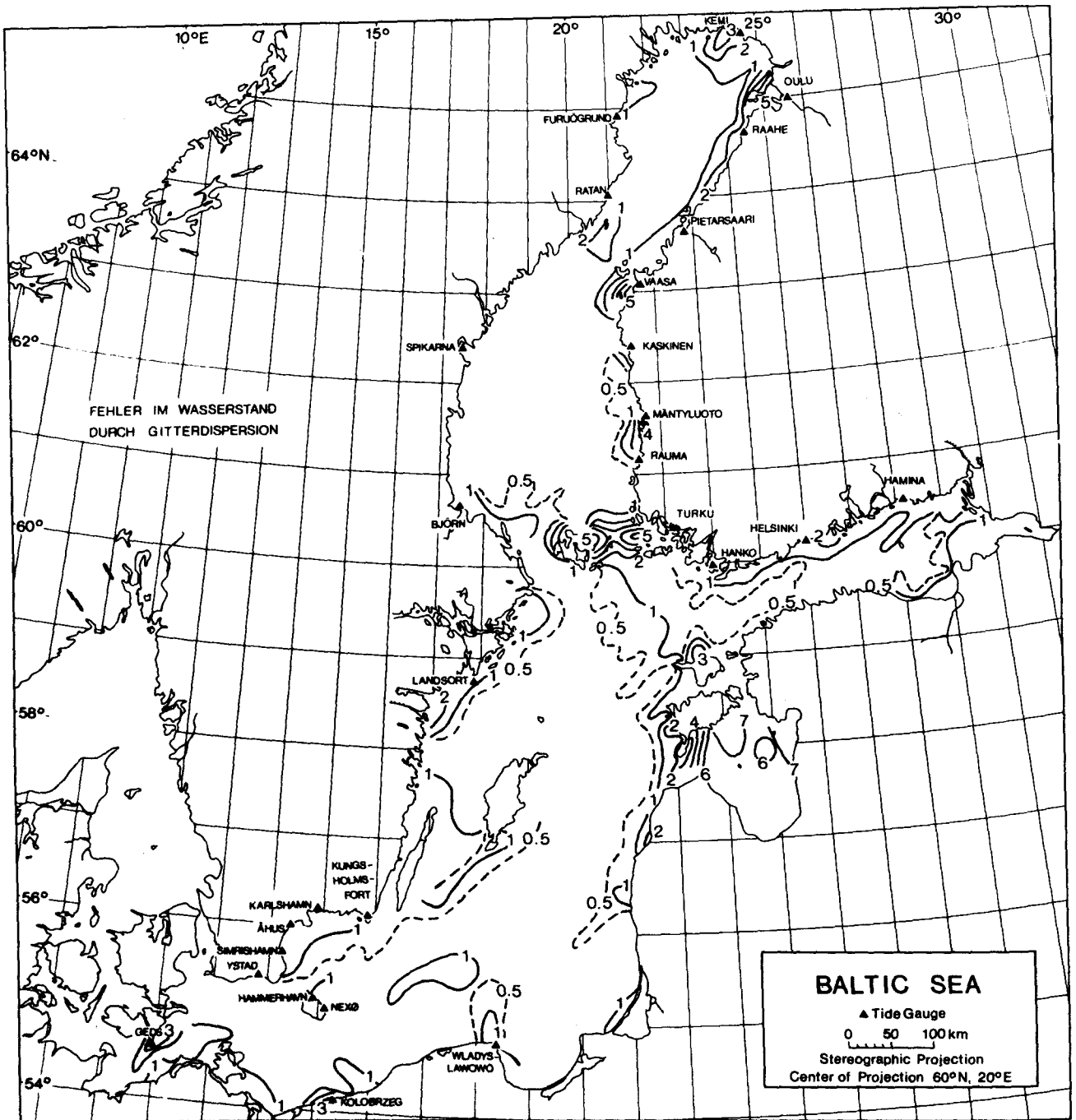


Abb. 1.3-3

Durch Gitterdispersion verursachter Fehler im Wasserstand
(in cm) nach 4 Tagen Südwind.

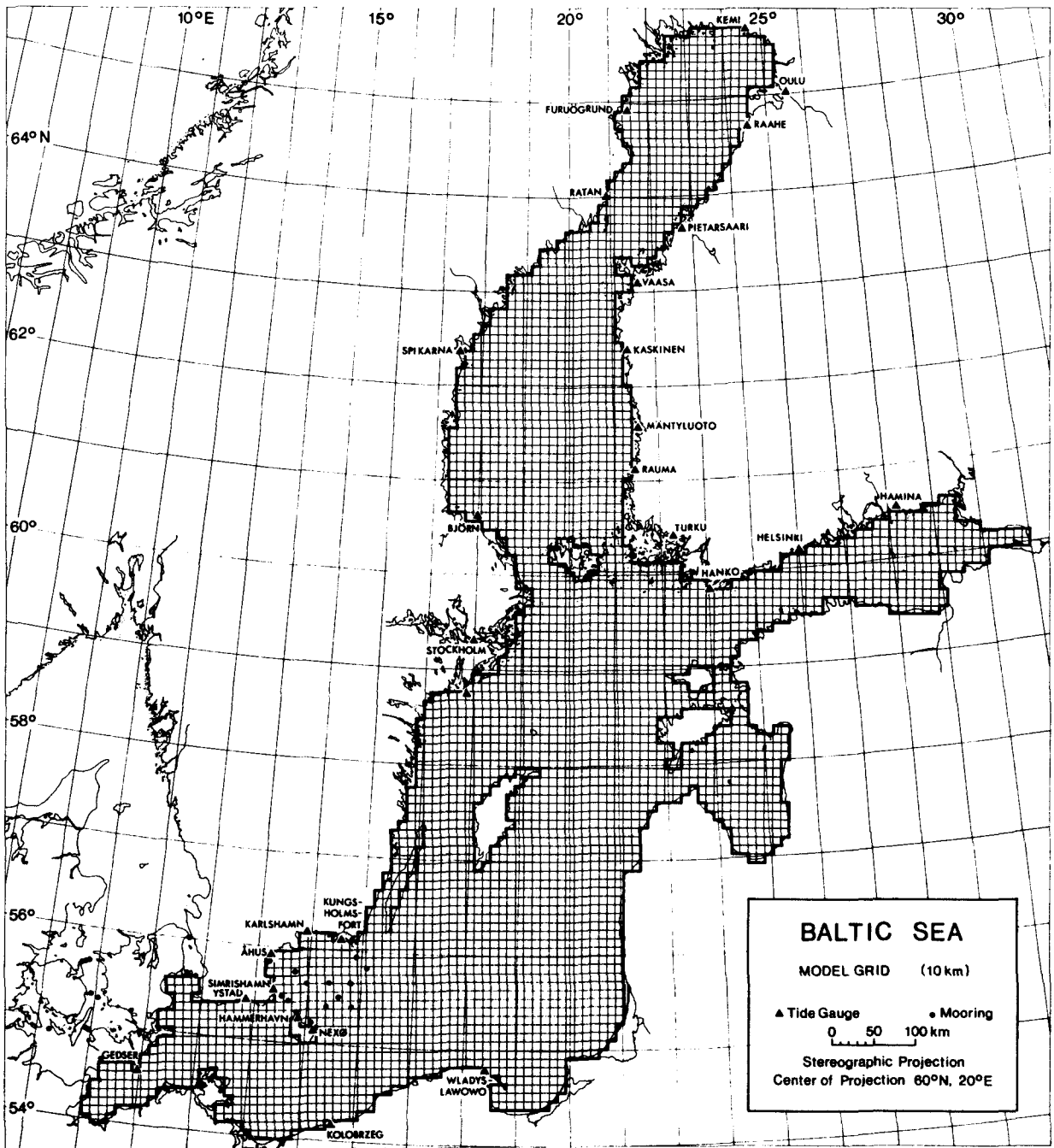


Abb. 1.3-4

Stereographische Projektion der Ostsee mit 10 km x 10 km
Modellgitter, Projektionszentrum $\varphi=60^\circ$, $\lambda=20^\circ$.

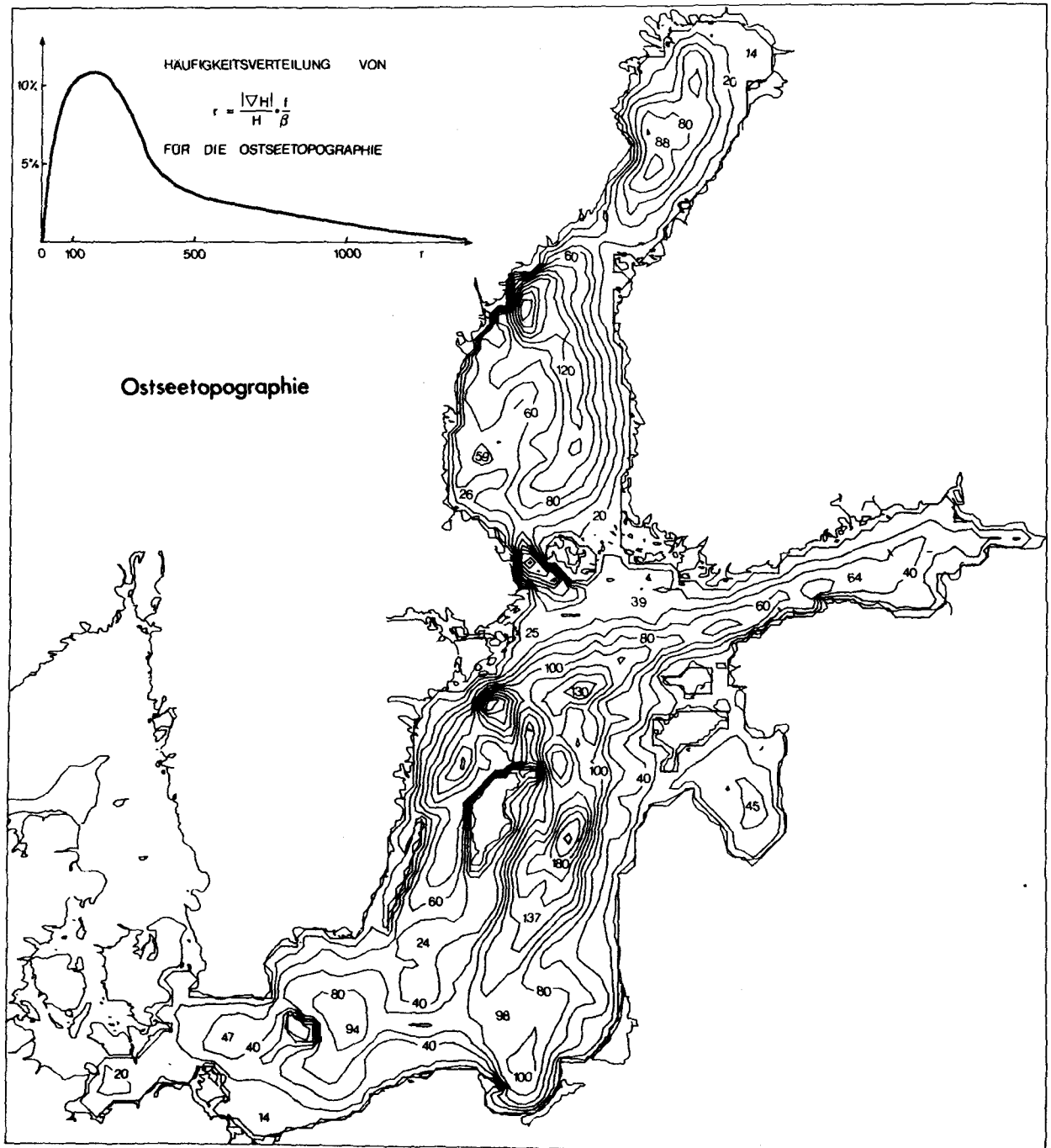


Abb. 1.3-5

Geglättete Topographie der Ostsee wie sie im numerischen Modell verwendet wurde (Einsatz oben links, siehe §2.3.1)

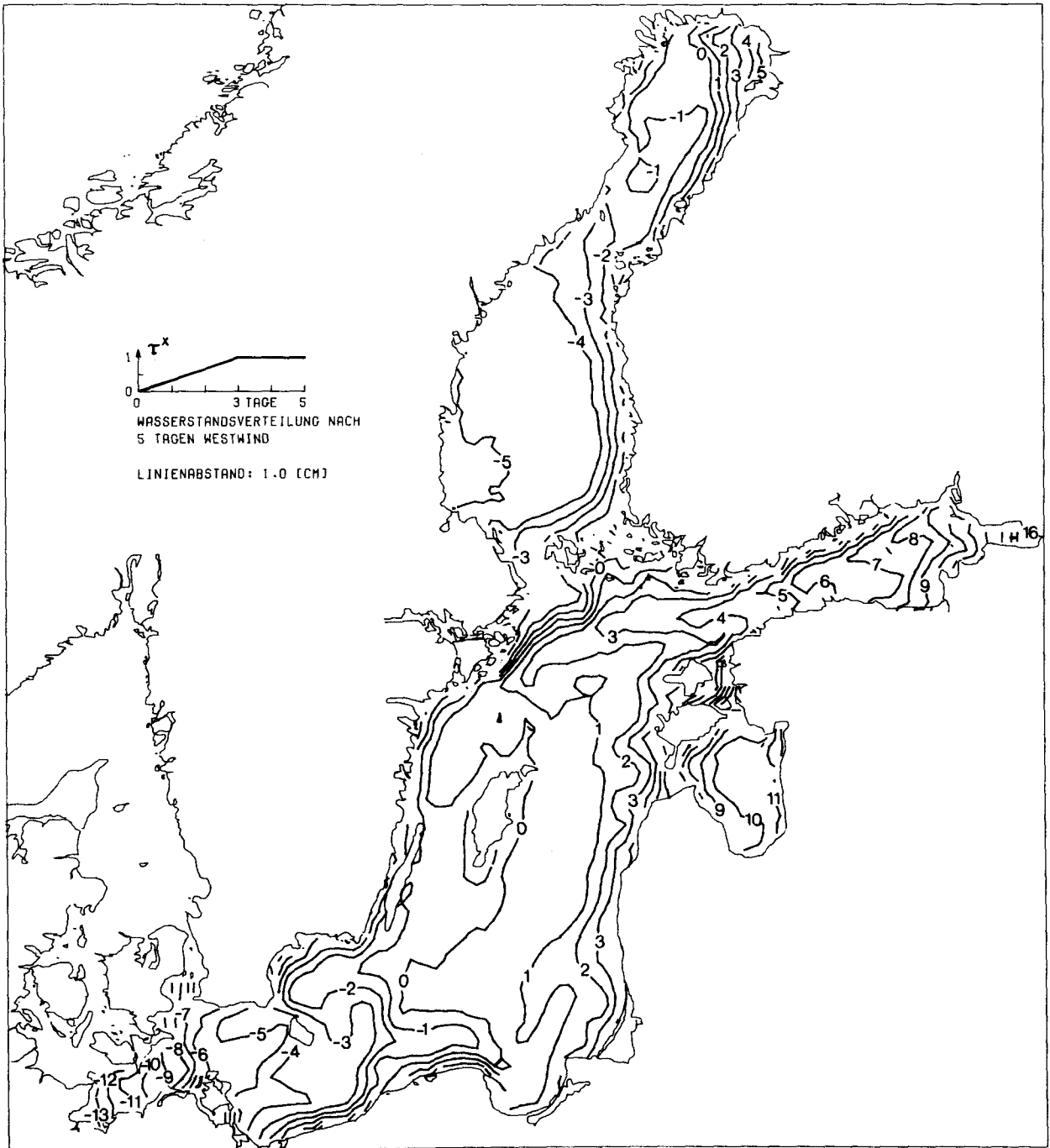
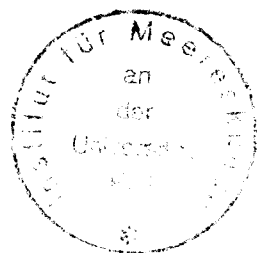


Abb. 2.1-1



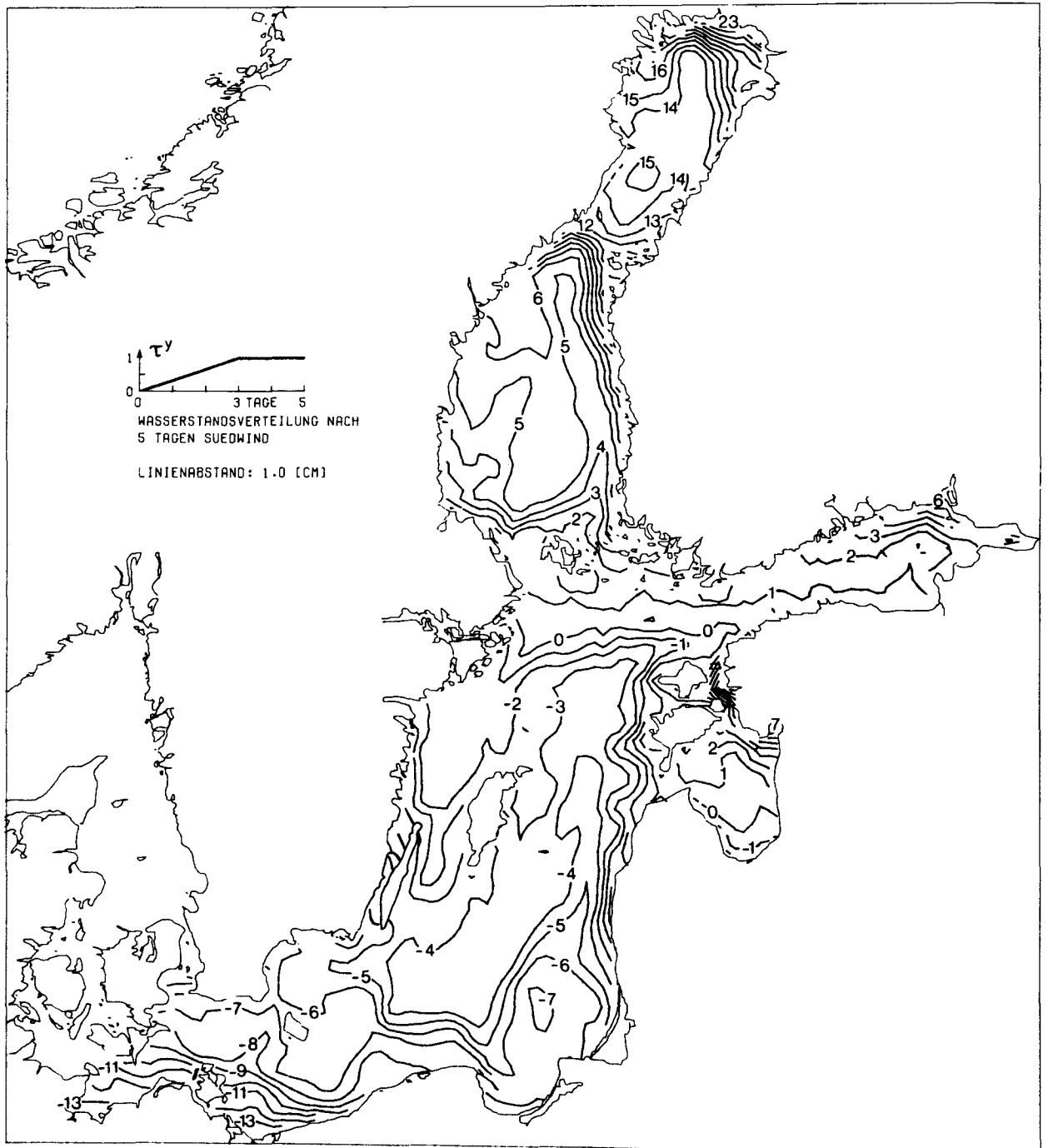


Abb. 2.1-2

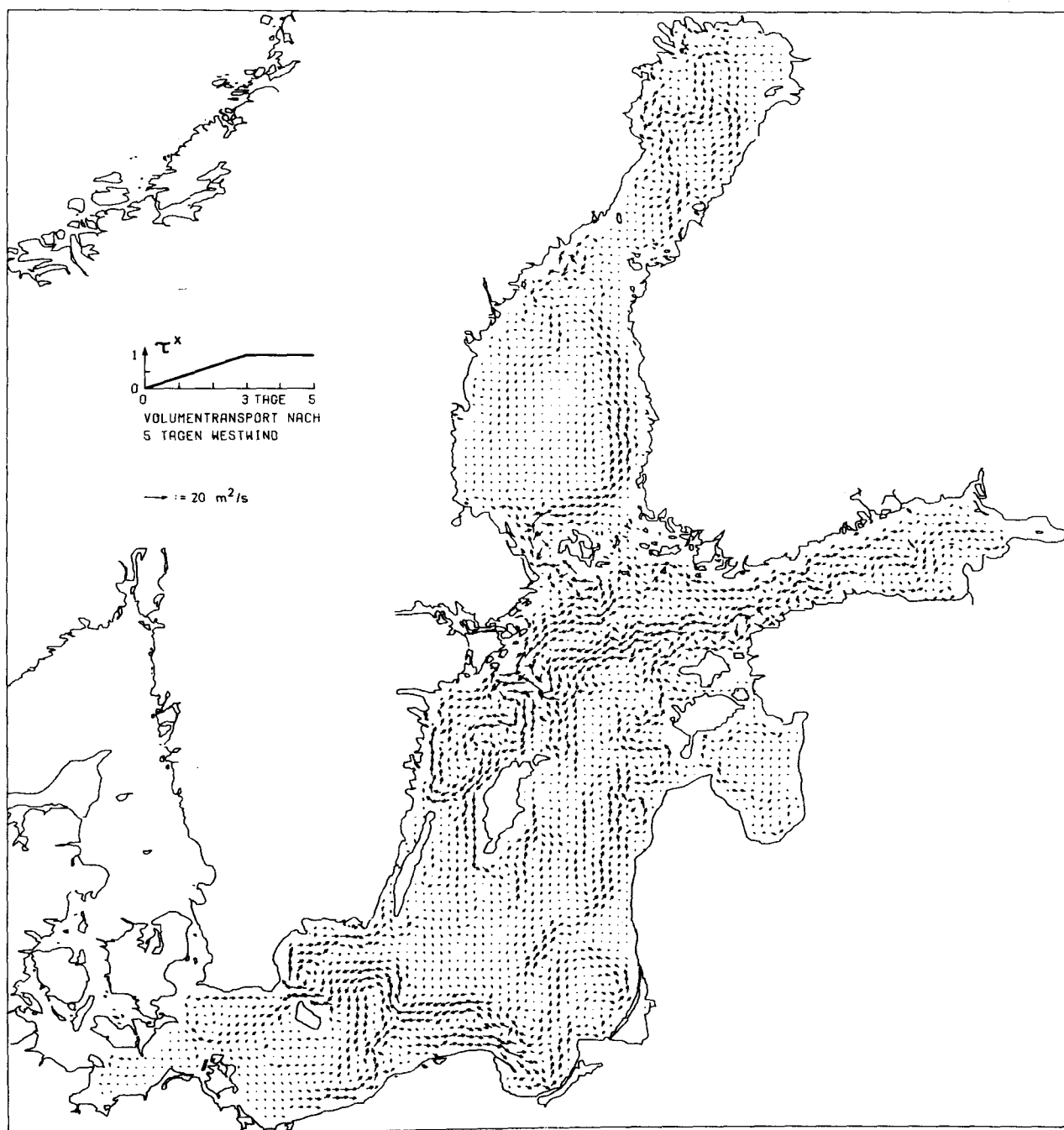


Abb. 2.1-3

Volumentransport in der homogenen Ostsee bei Westwind.
 Skala der Pfeile, siehe Bildeinsatz, in m^2/s . Zur Umrechnung
 in m^3/s ist der Wert mit $10^4 m$ ($=10km$) zu multiplizieren.

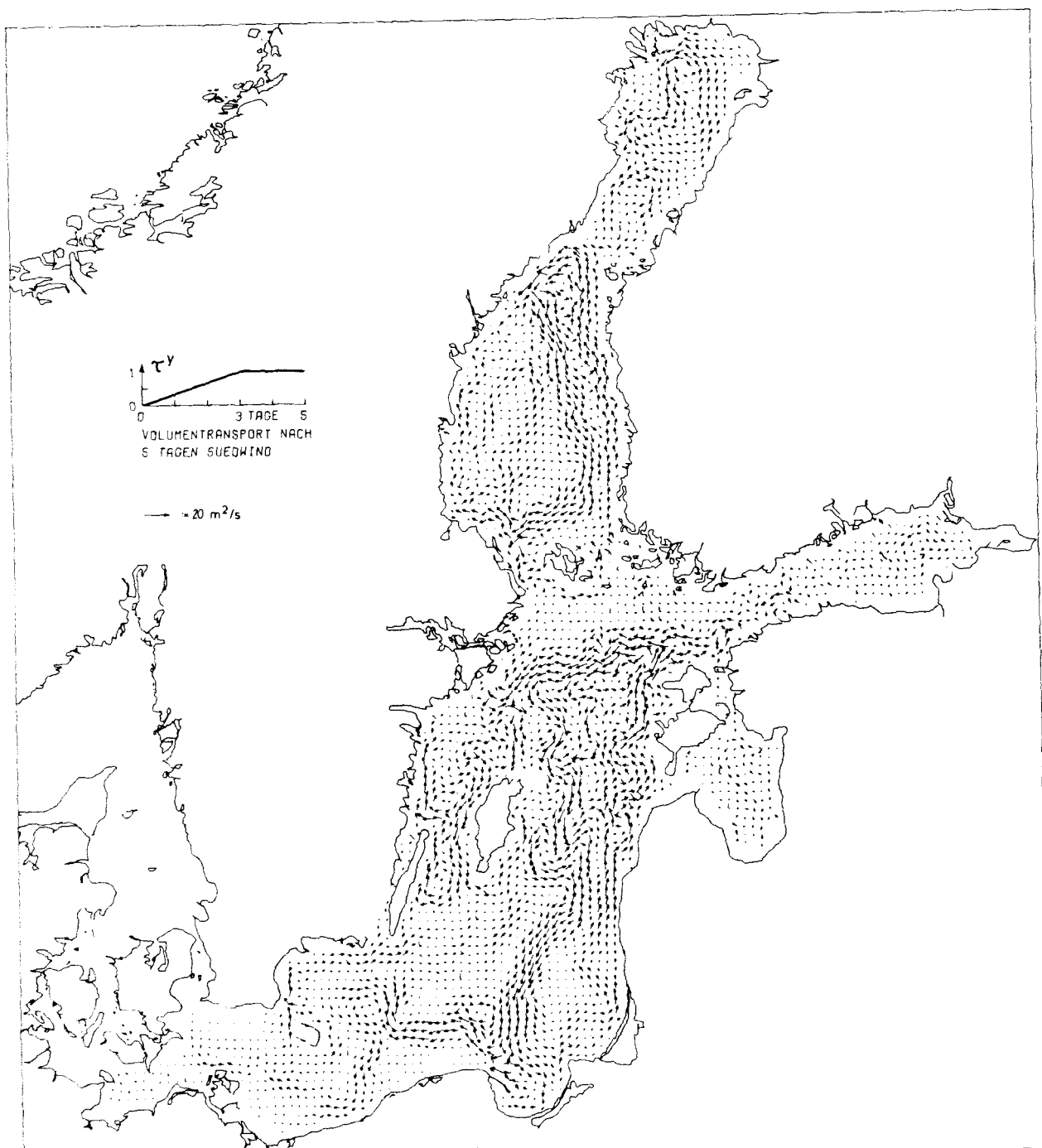


Abb. 2.1-4

Volumentransport in der homogenen Ostsee bei Südwind.

Skala wie bei Abb. 2.1-3 .

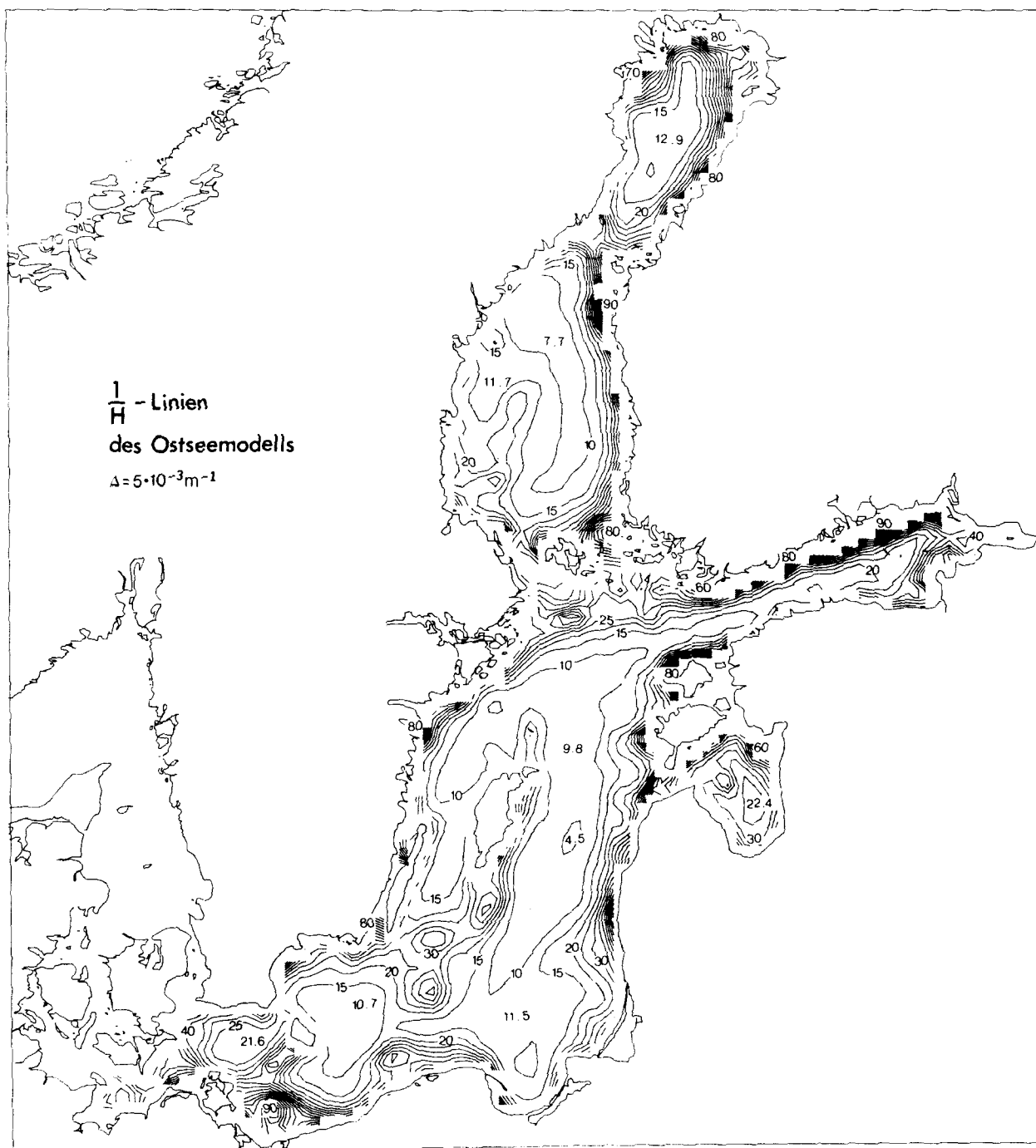


Abb. 2.1-5

$1/H$ - Linien der Ostsee, Werte in 10^{-3} m^{-1} , abgeschnitten unterhalb von 10 m Tiefe.

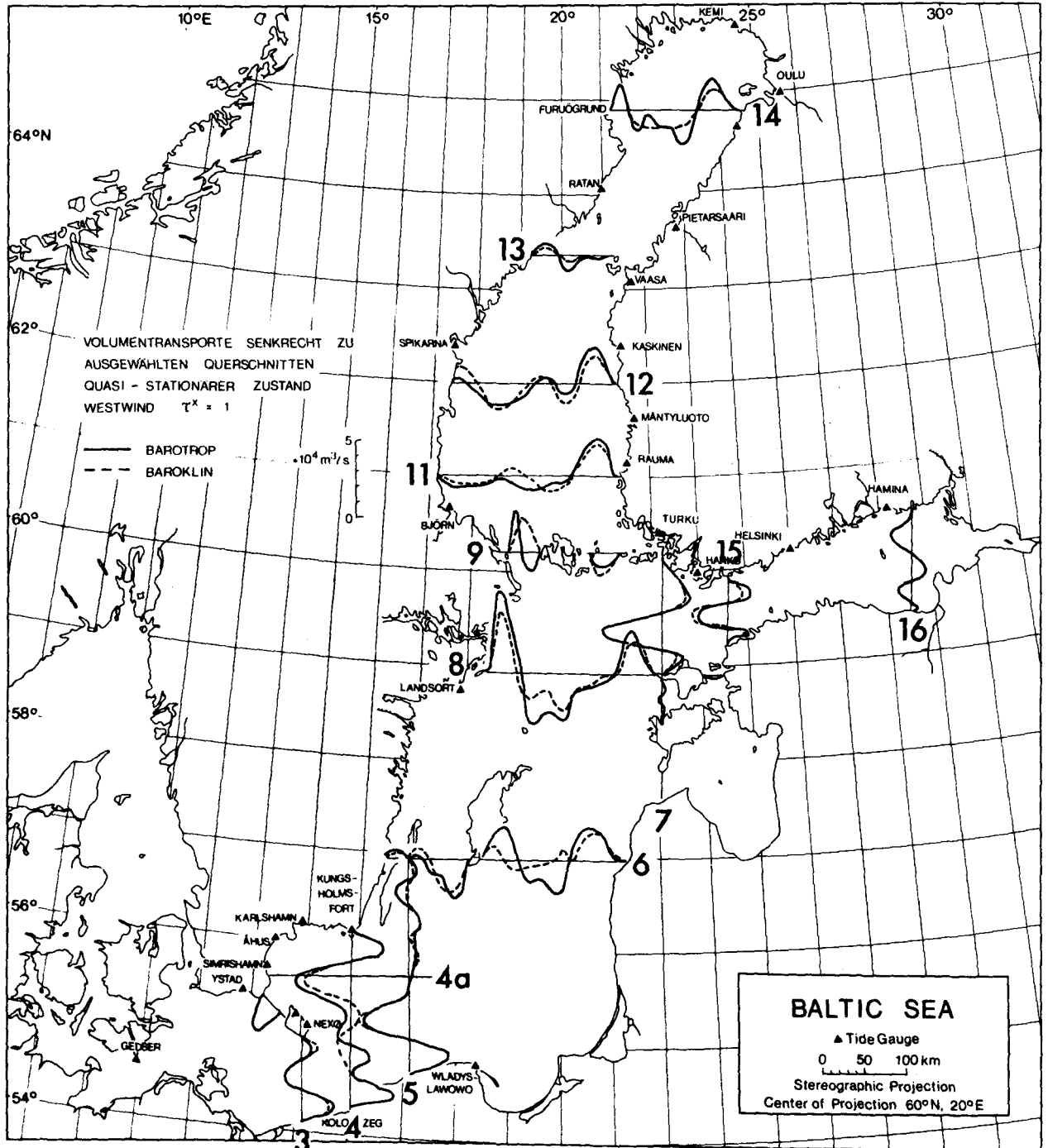


Abb. 2.1-6

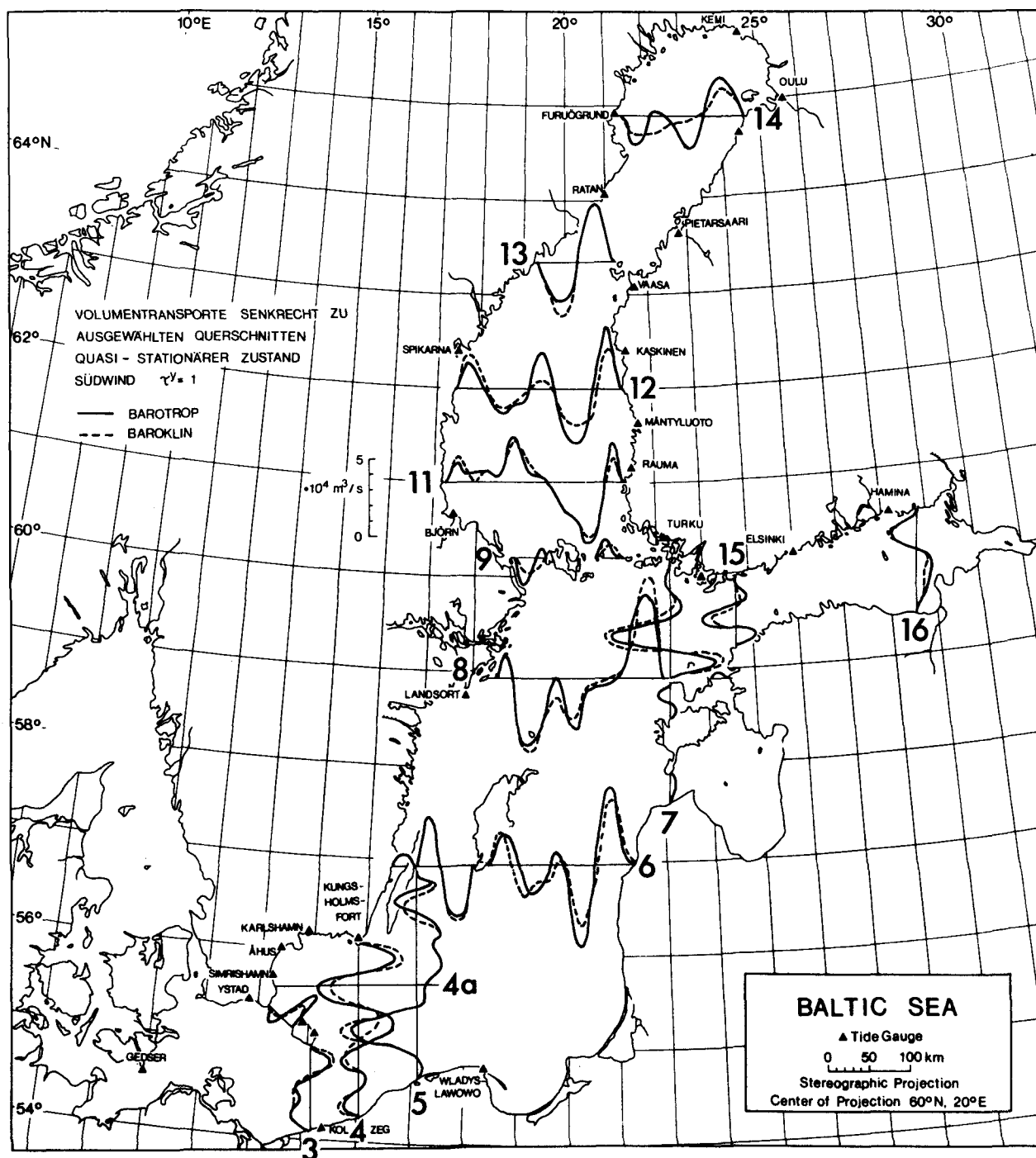


Abb. 2.1-7

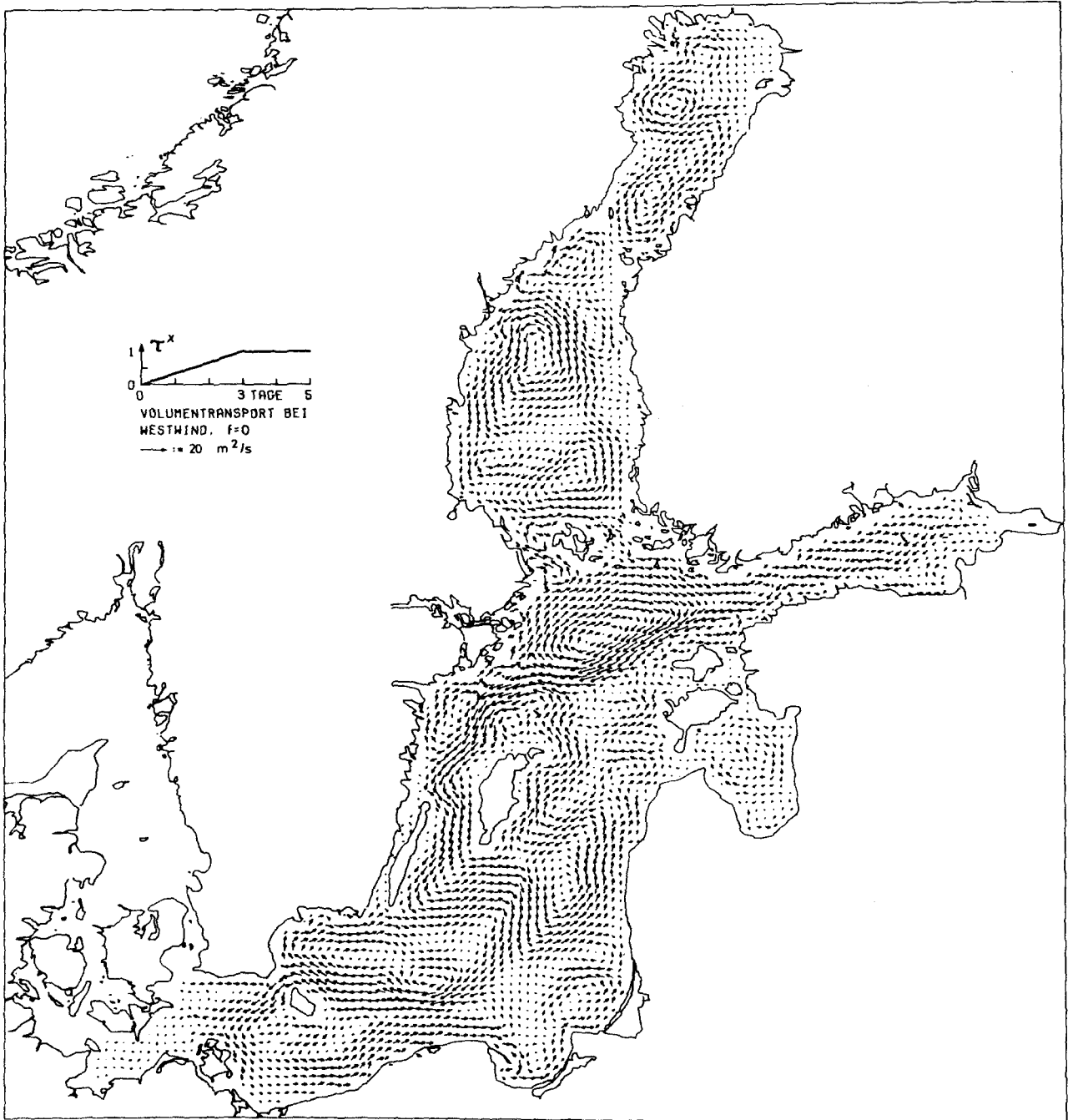


Abb. 2.1-8
Volumentransporte in der nicht-rotierenden Ostsee bei Westwind

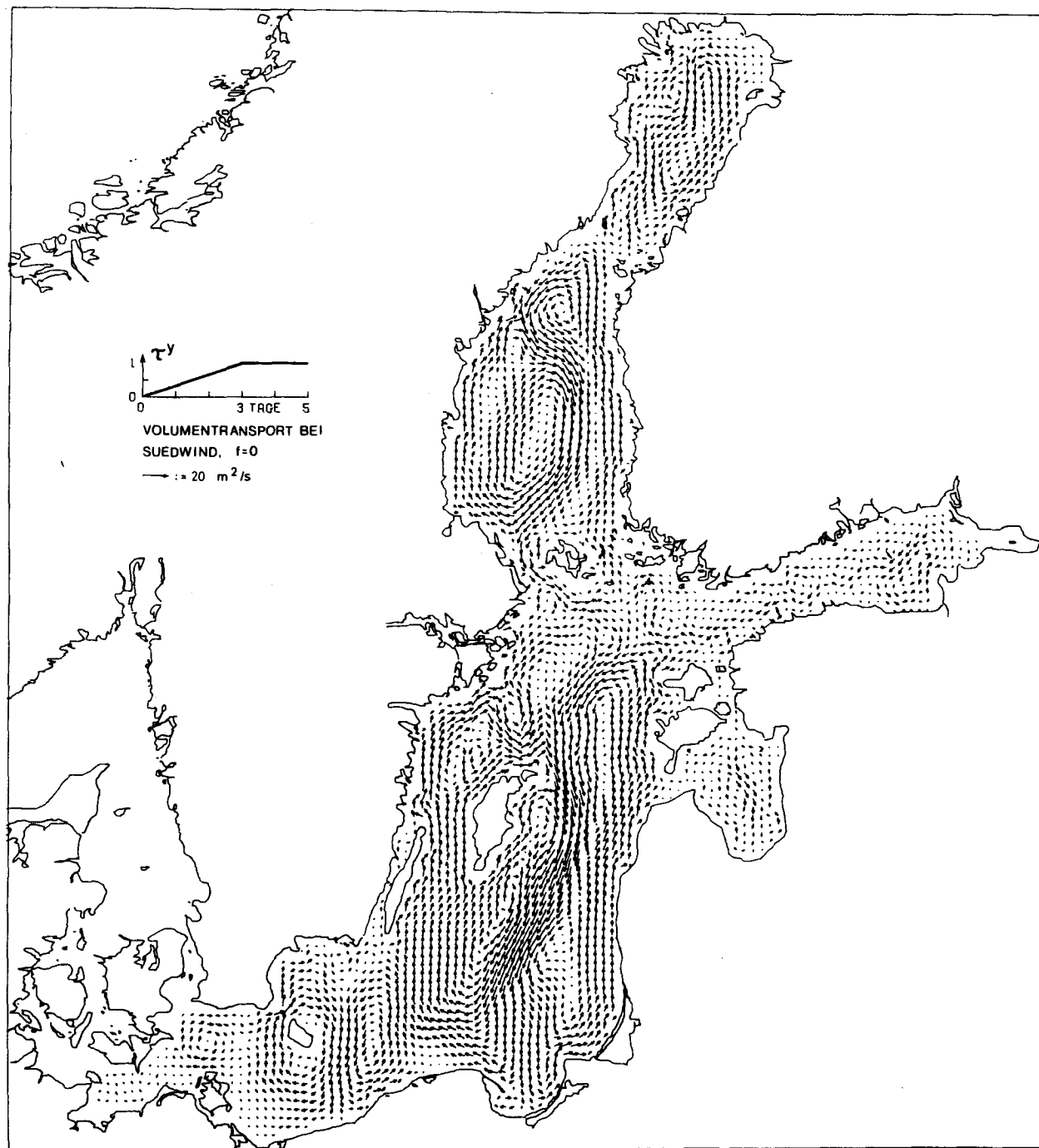


Abb. 2.1-9
Volumentransport in der nicht-rotierenden Ostsee bei Südwind

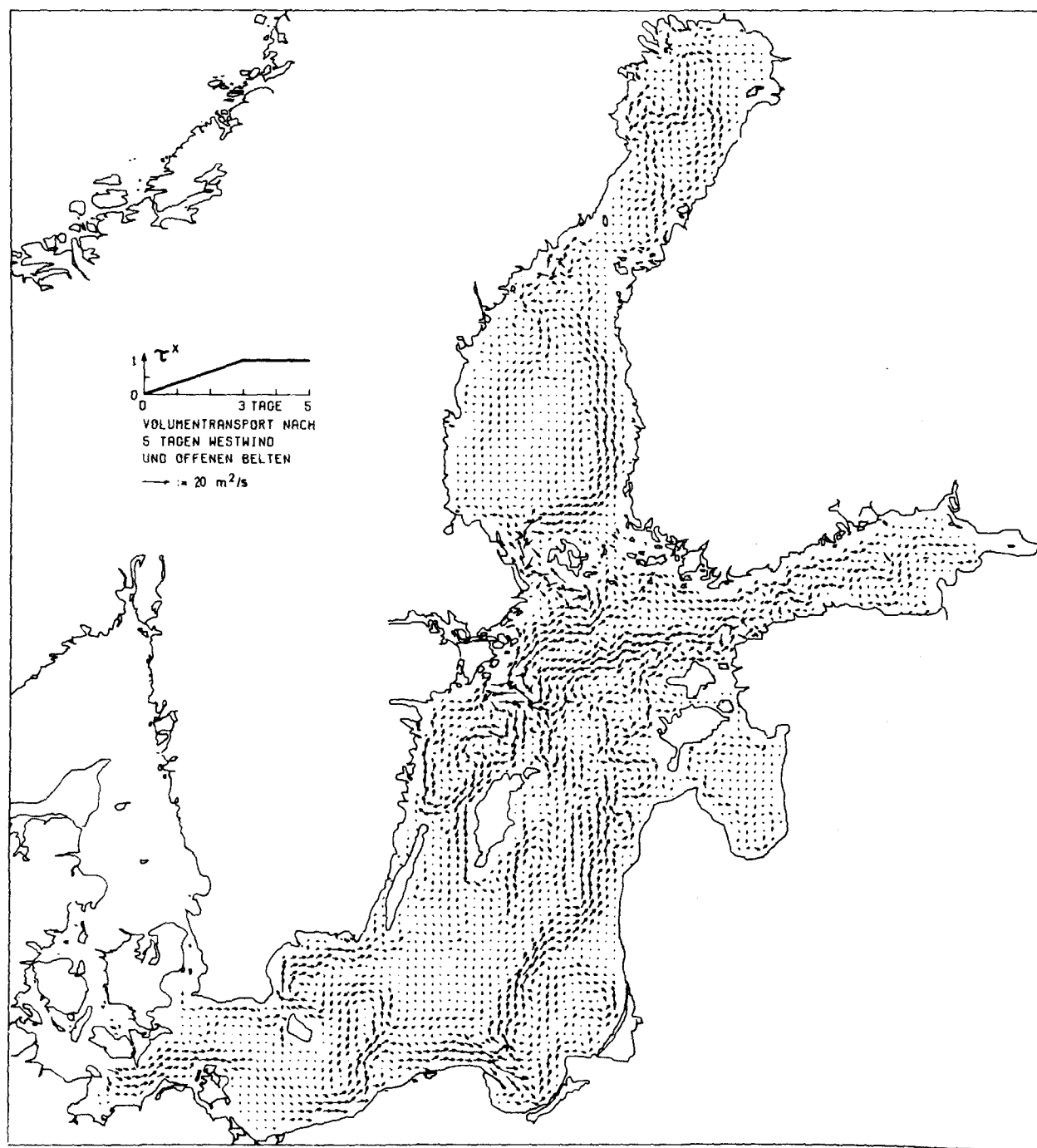


Abb. 2.1-10

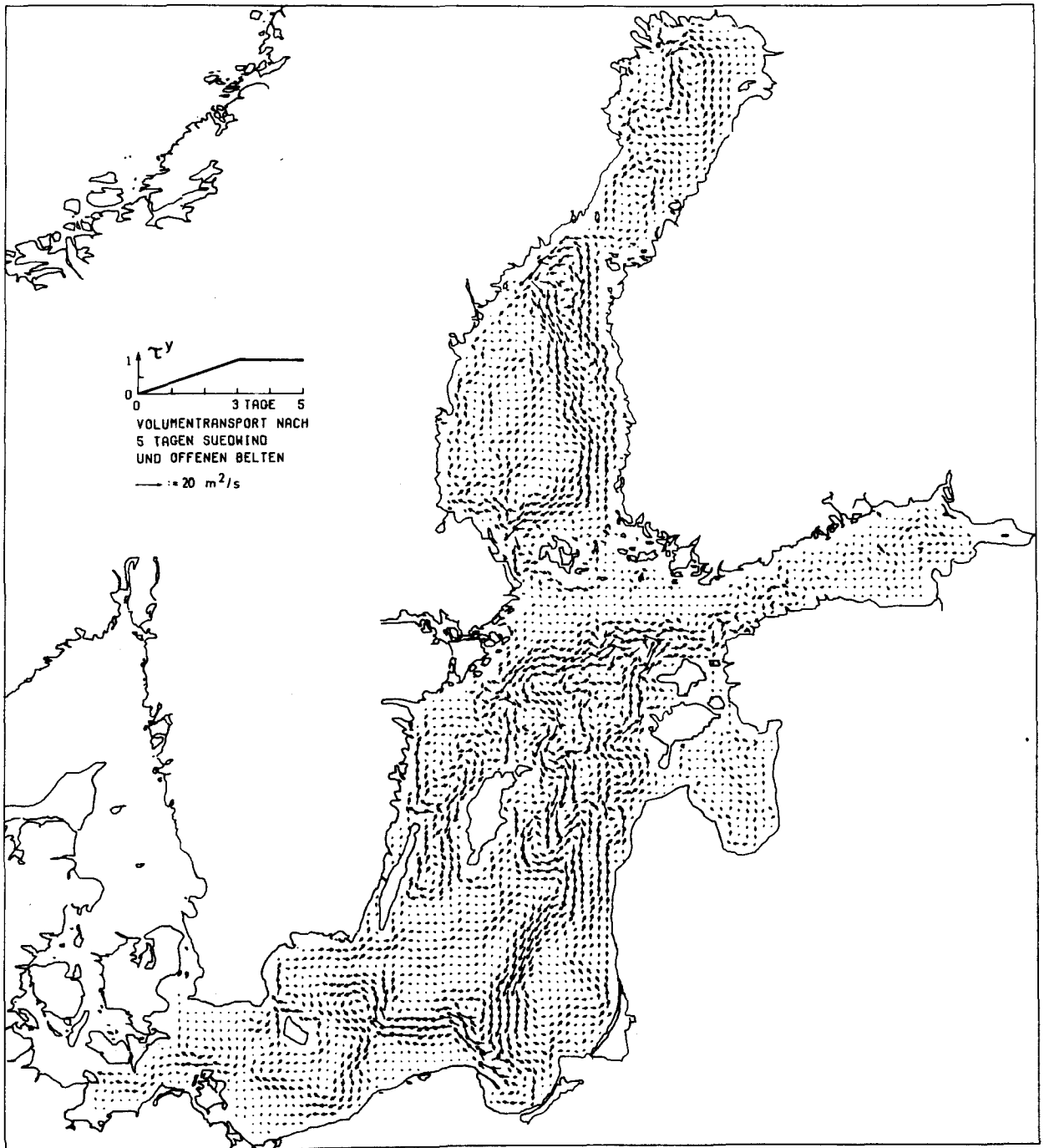


Abb. 2.1-11

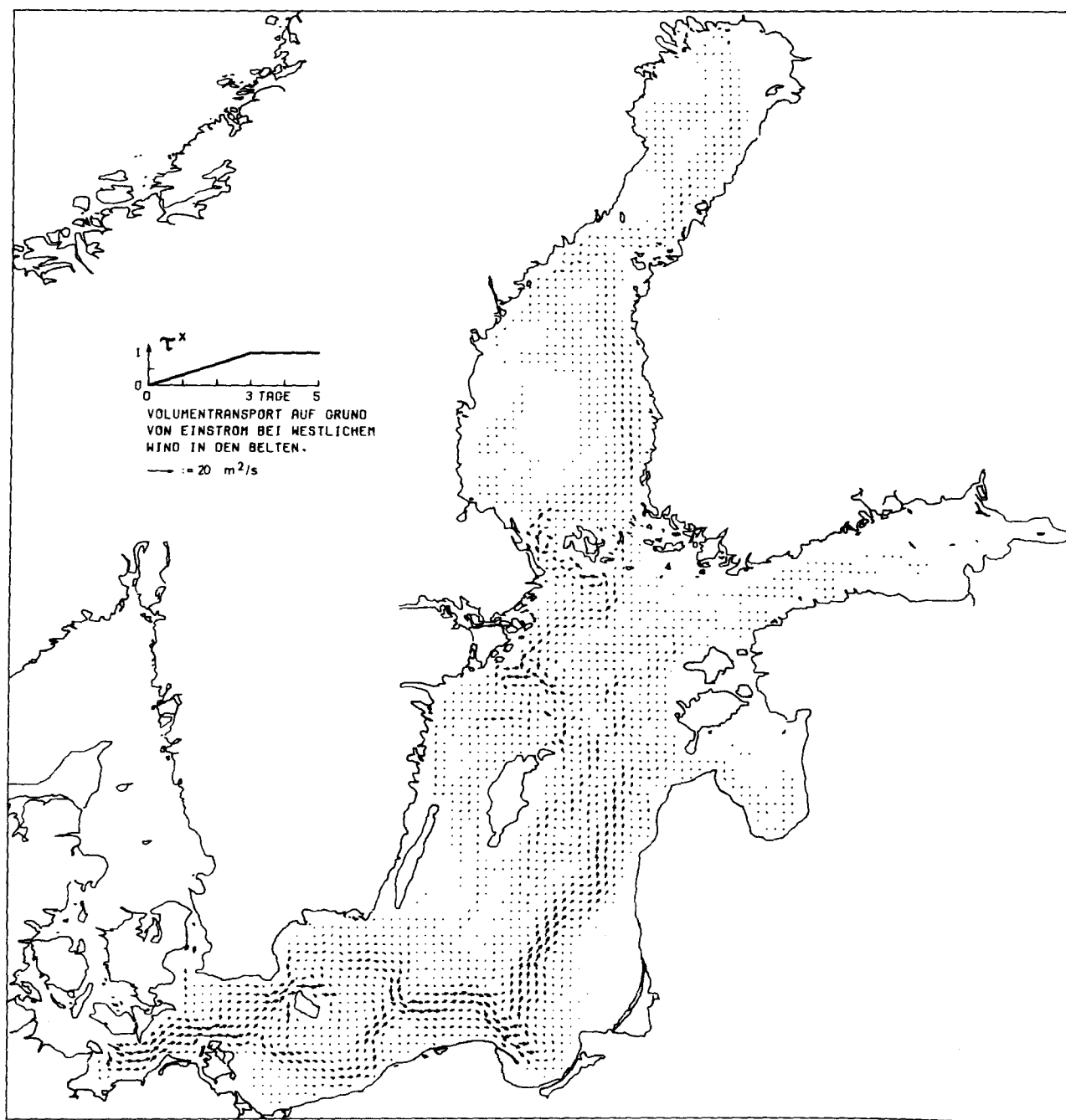


Abb. 2.1-12

Volumentransport in der homogenen Ostsee bei vorgegebenem Einstrom durch die Belte.

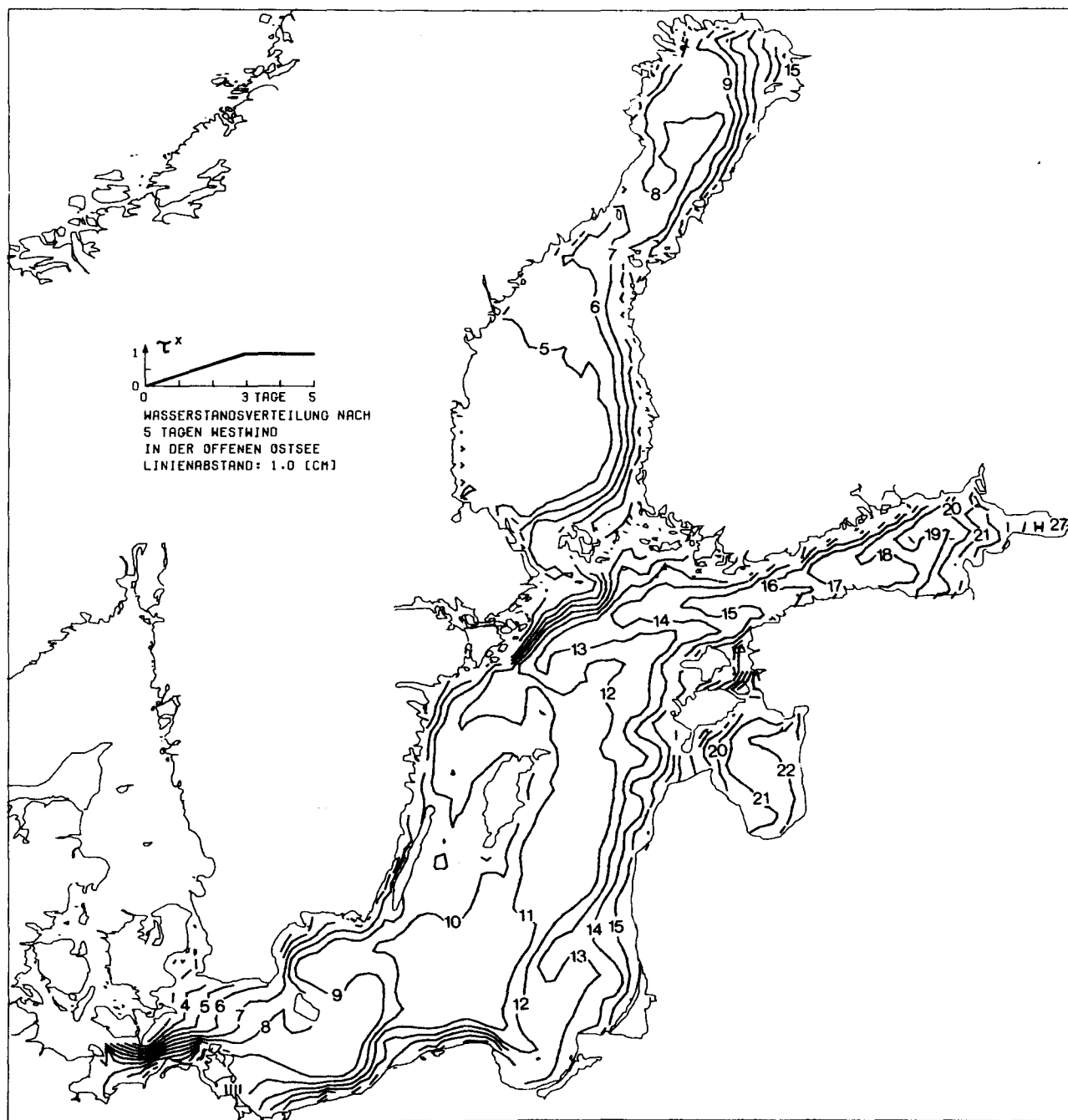


Abb. 2.1-13

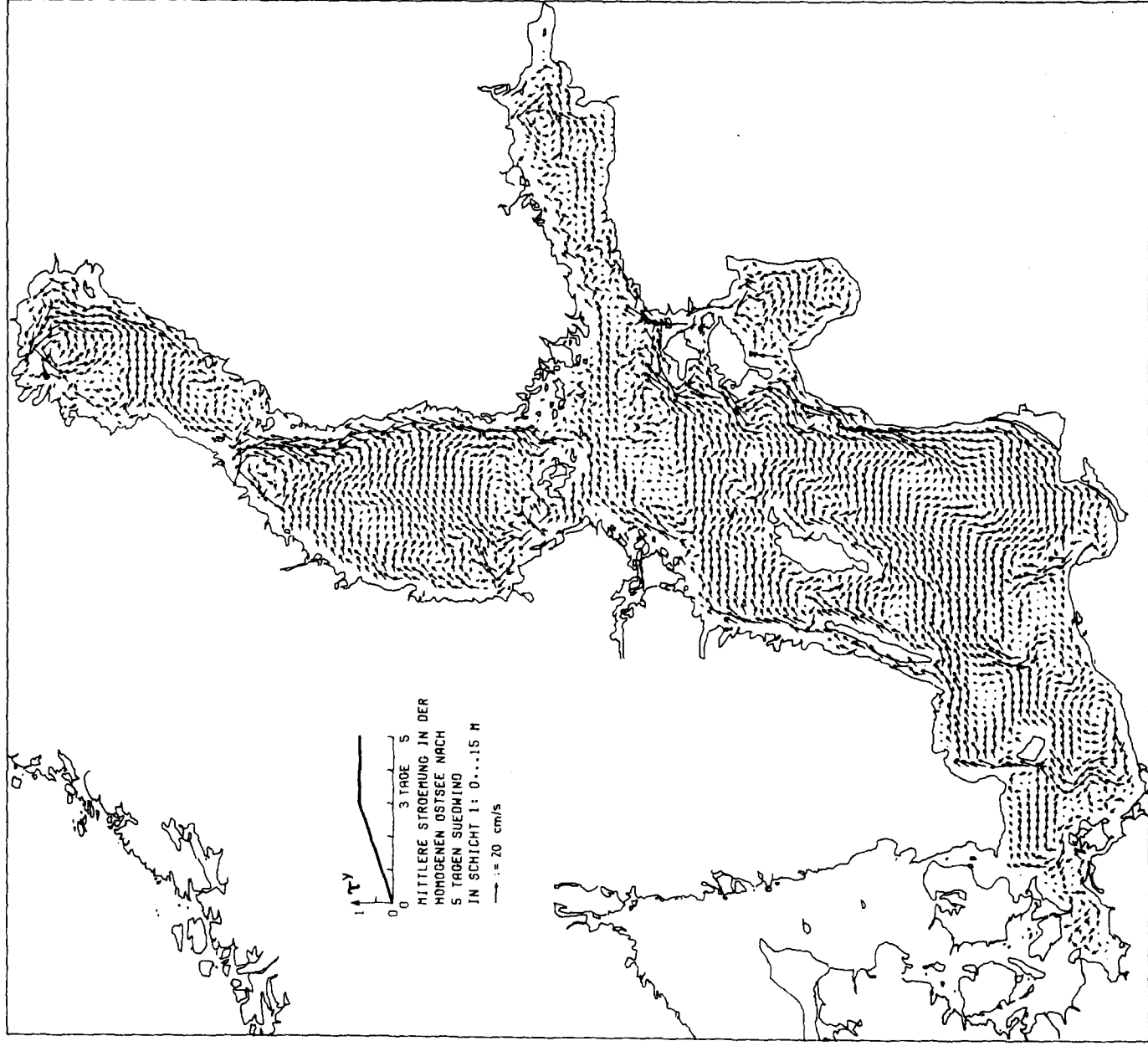


Abb. 2.1-14

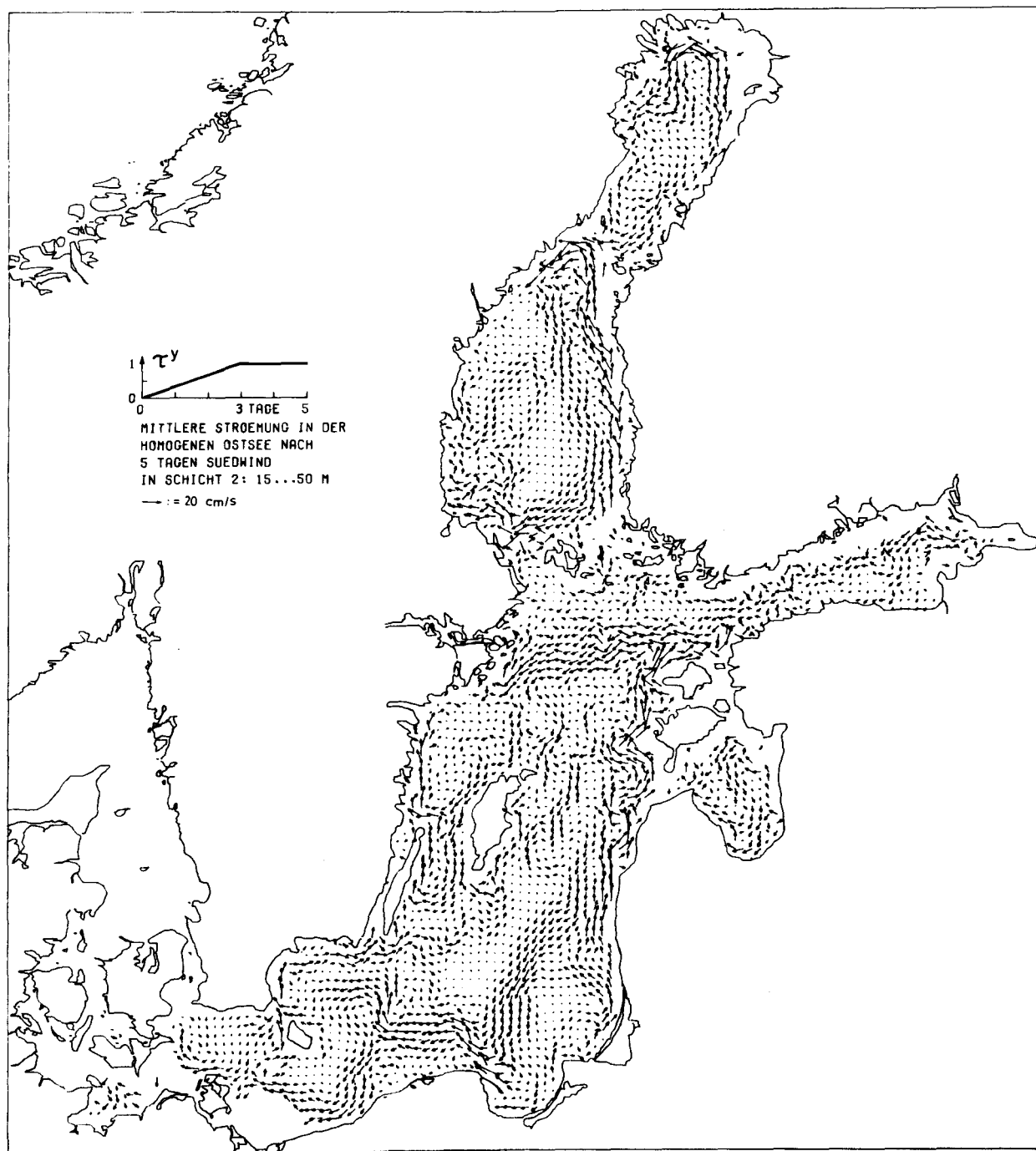


Abb. 2.1-15

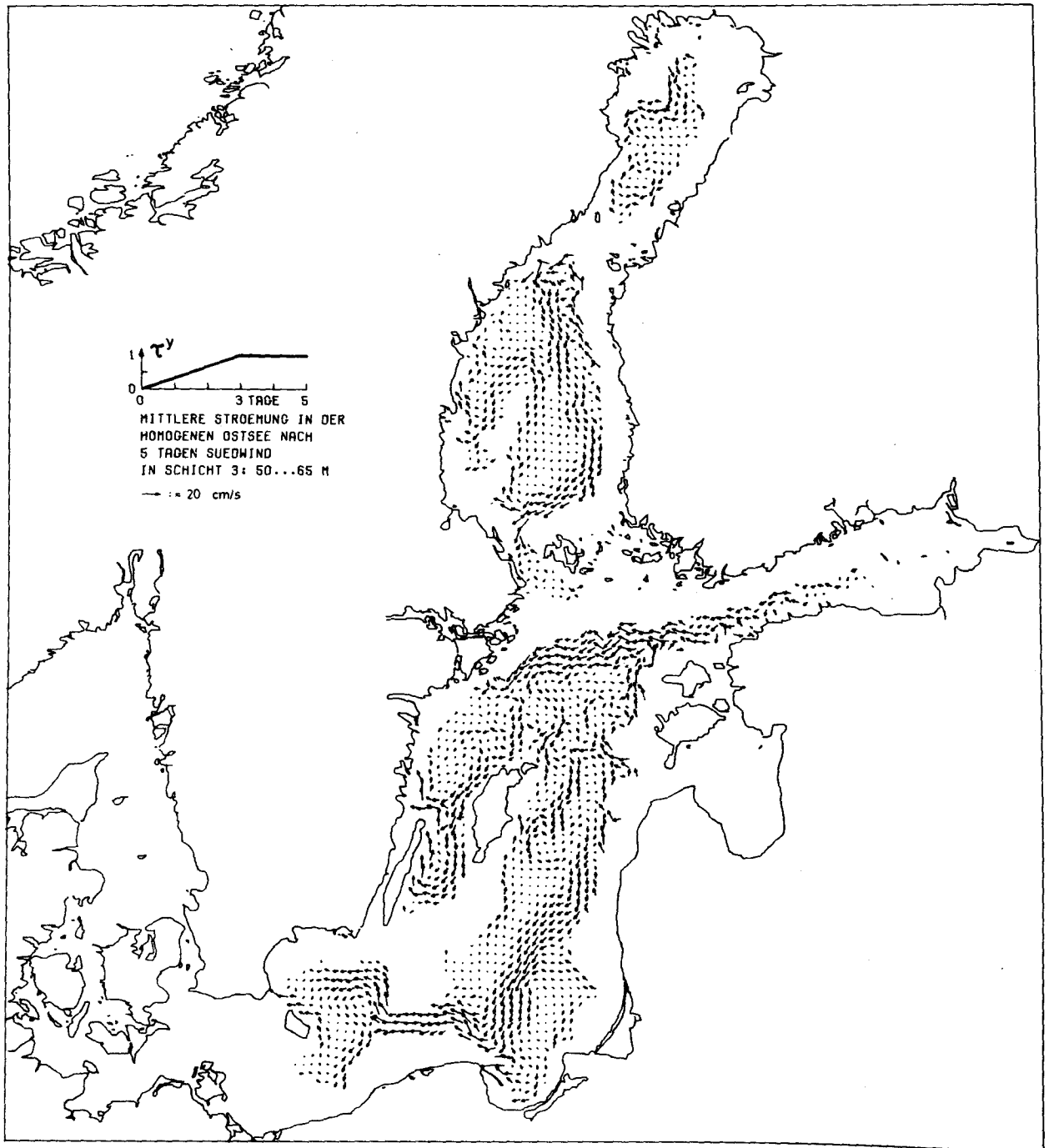


Abb. 2.1-16

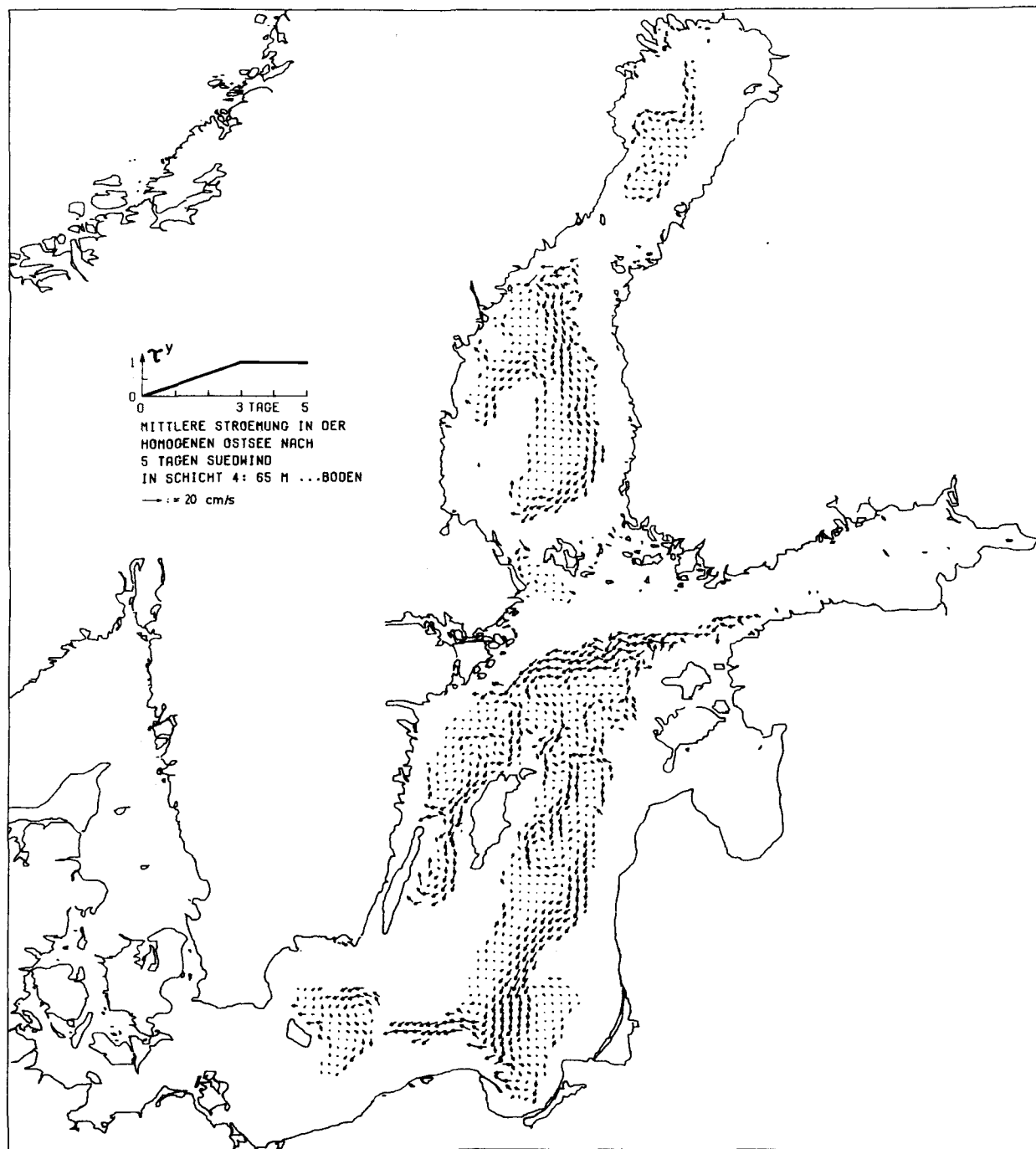


Abb. 2.1-17

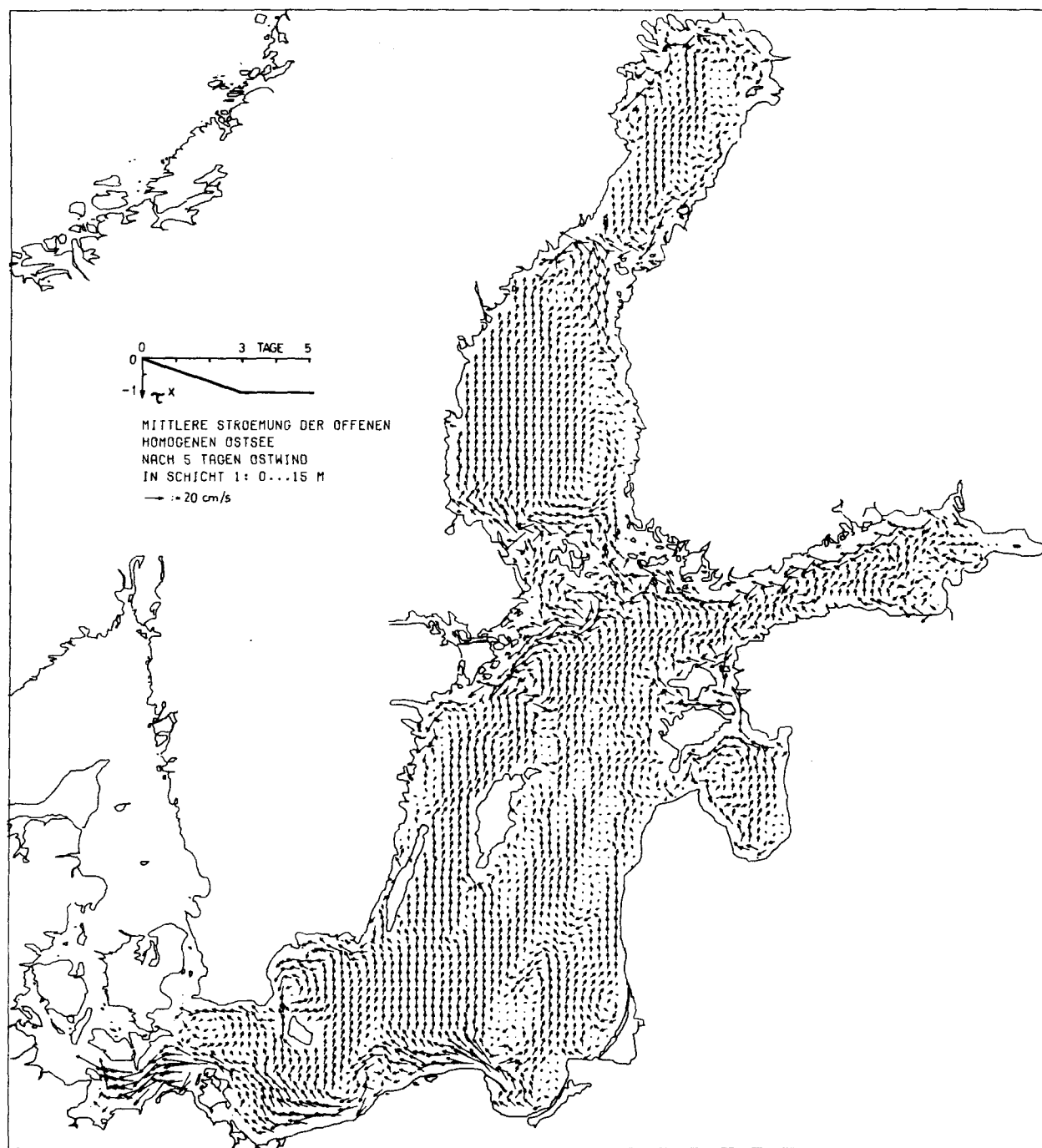


Abb. 2.1-18

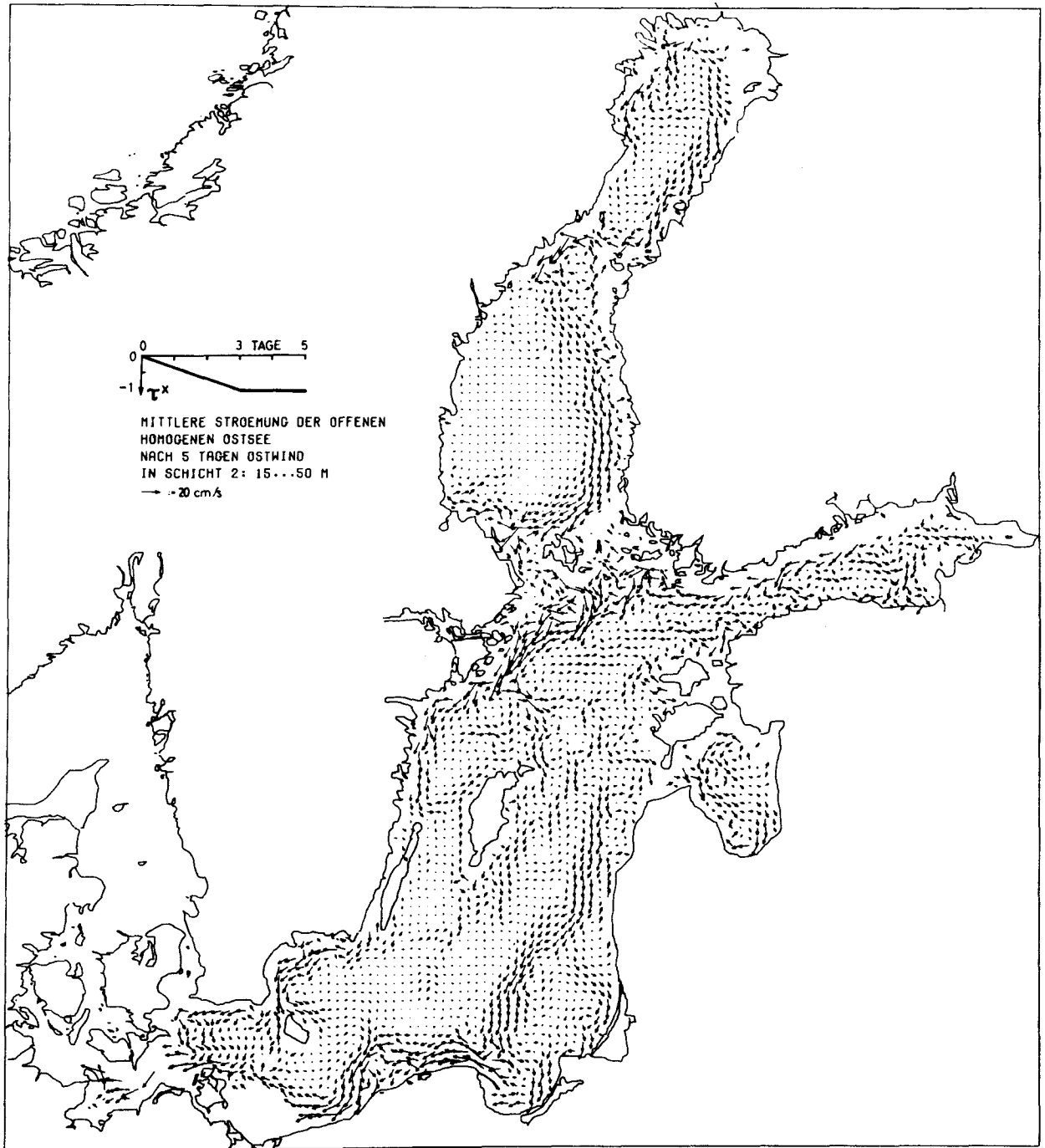


Abb. 2.1-19

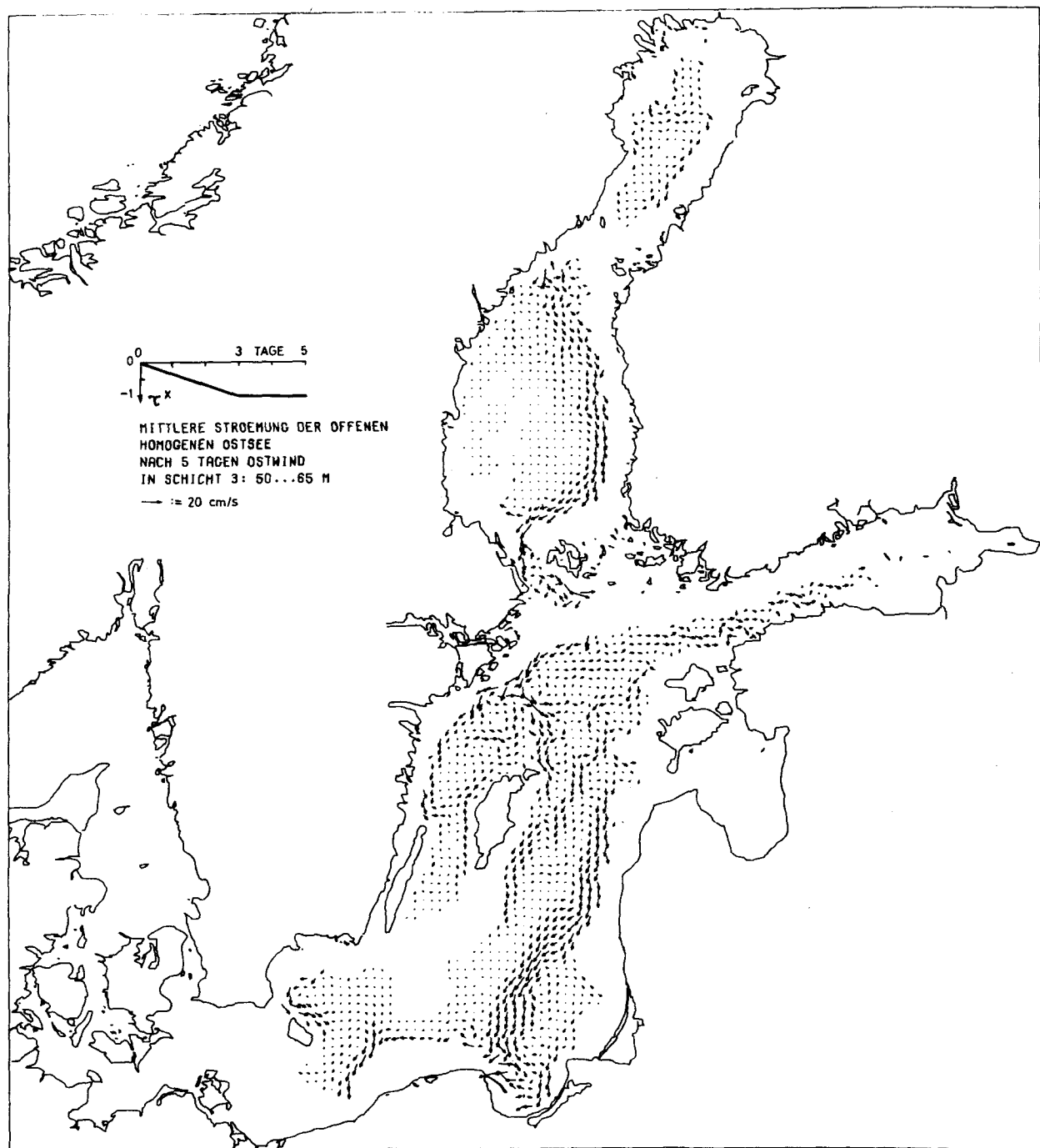


Abb. 2.1-20

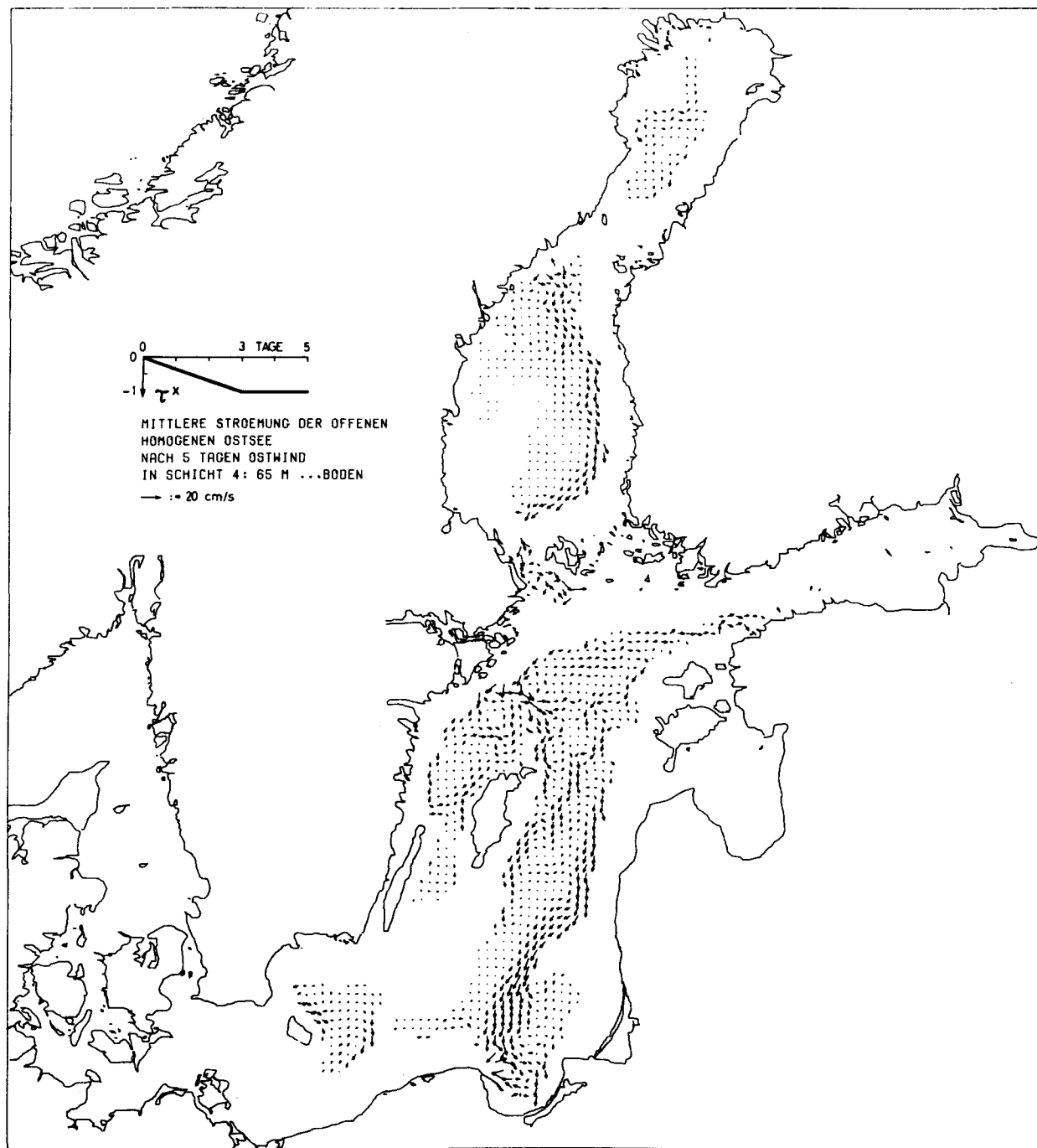


Abb. 2.1-21

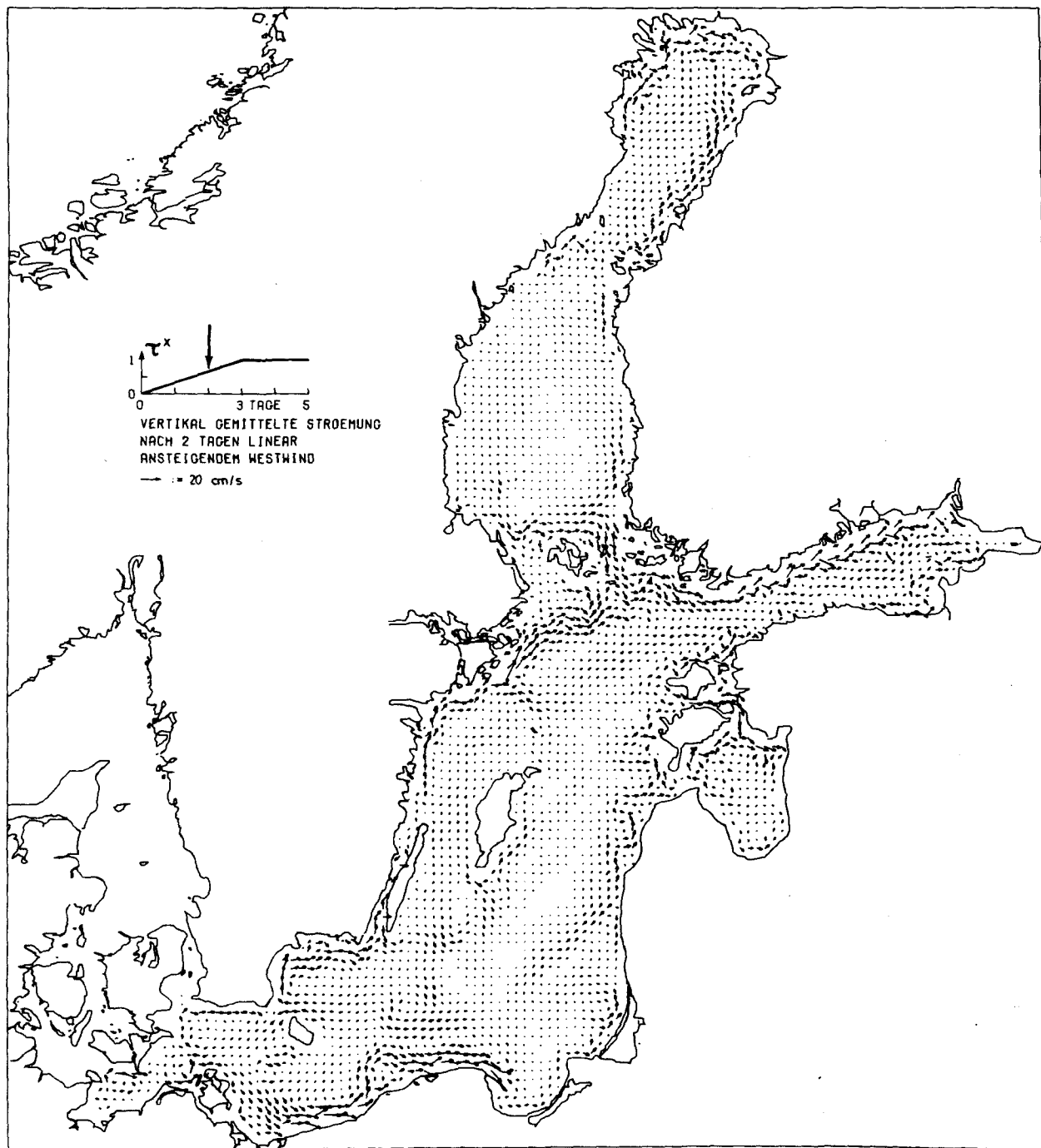


Abb. 2.1-22

(Pfeil im Bildeinsatz zeigt Zeitpunkt der dargestellten Strömungsverteilung)

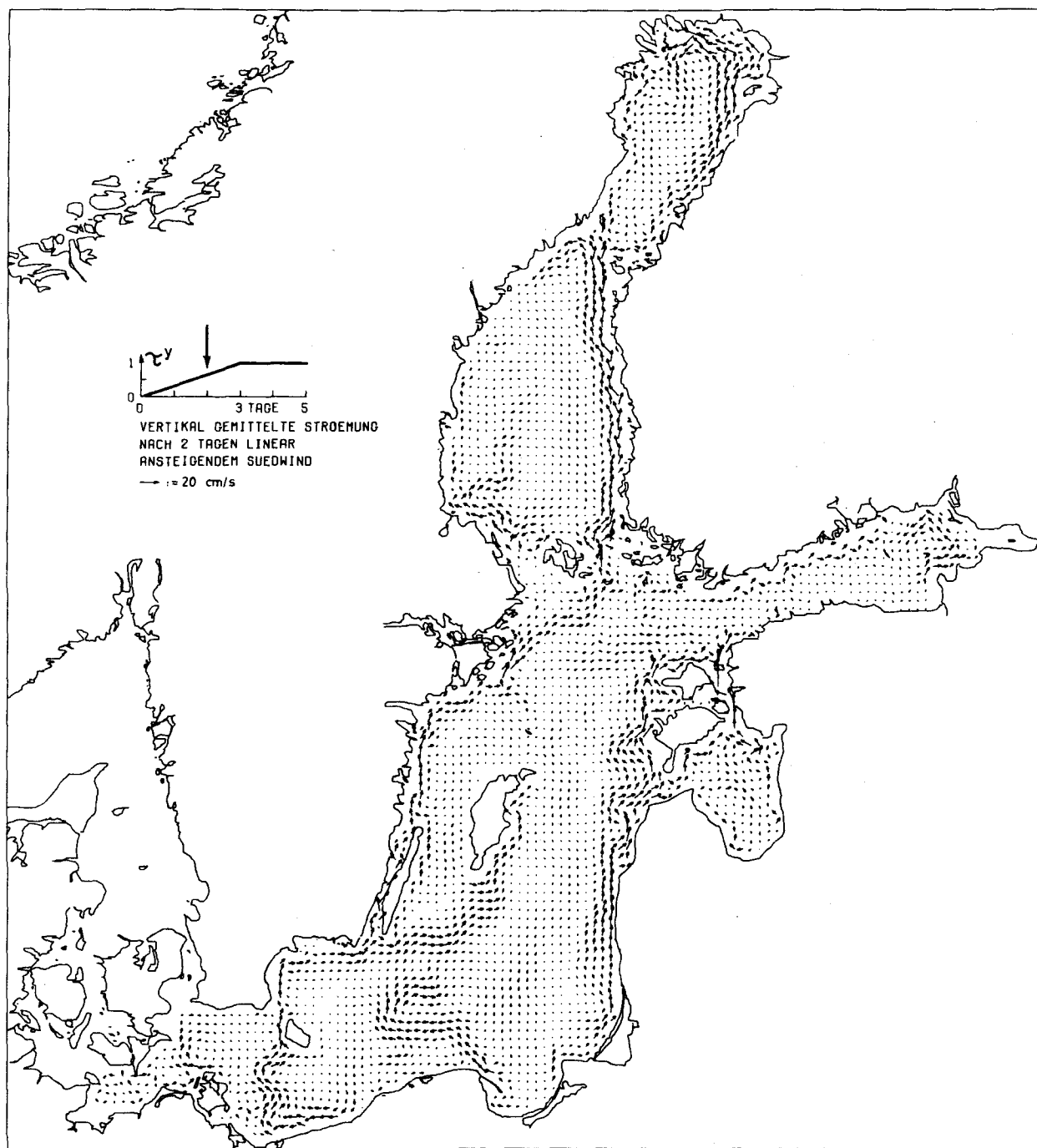


Abb. 2.1-23

(Pfeil im Bildeinsatz zeigt Zeitpunkt der dargestellten Strömungsverteilung)

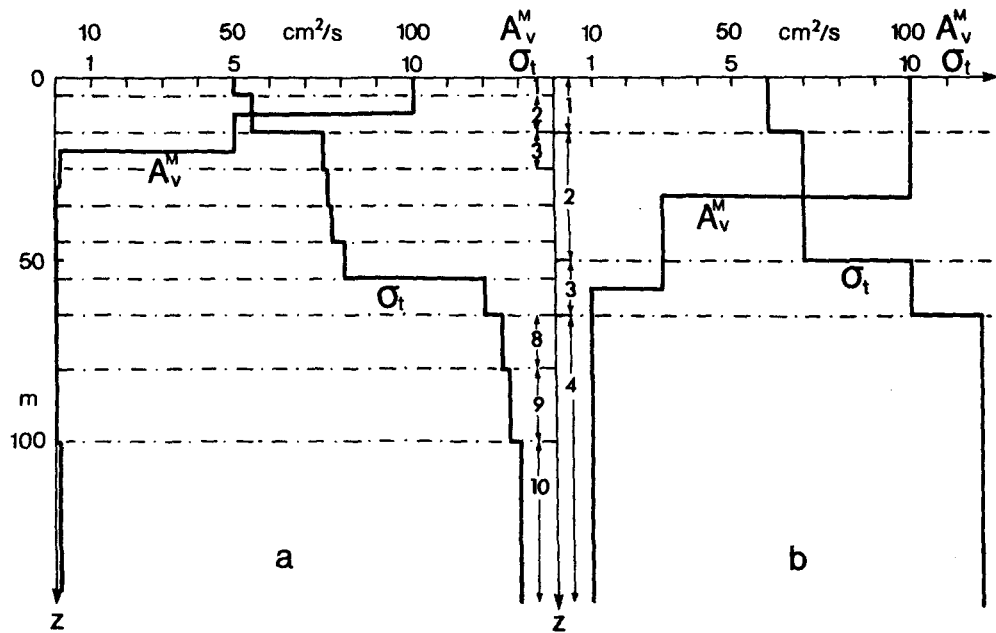


Abb. 2.2-1

Vertikale Verteilung von Dichte (σ_t) und Impulsdiffusion (A_v^M)
 für die Modellrechnungen mit
 (a) 10 Schichten und (b) 4 Schichten

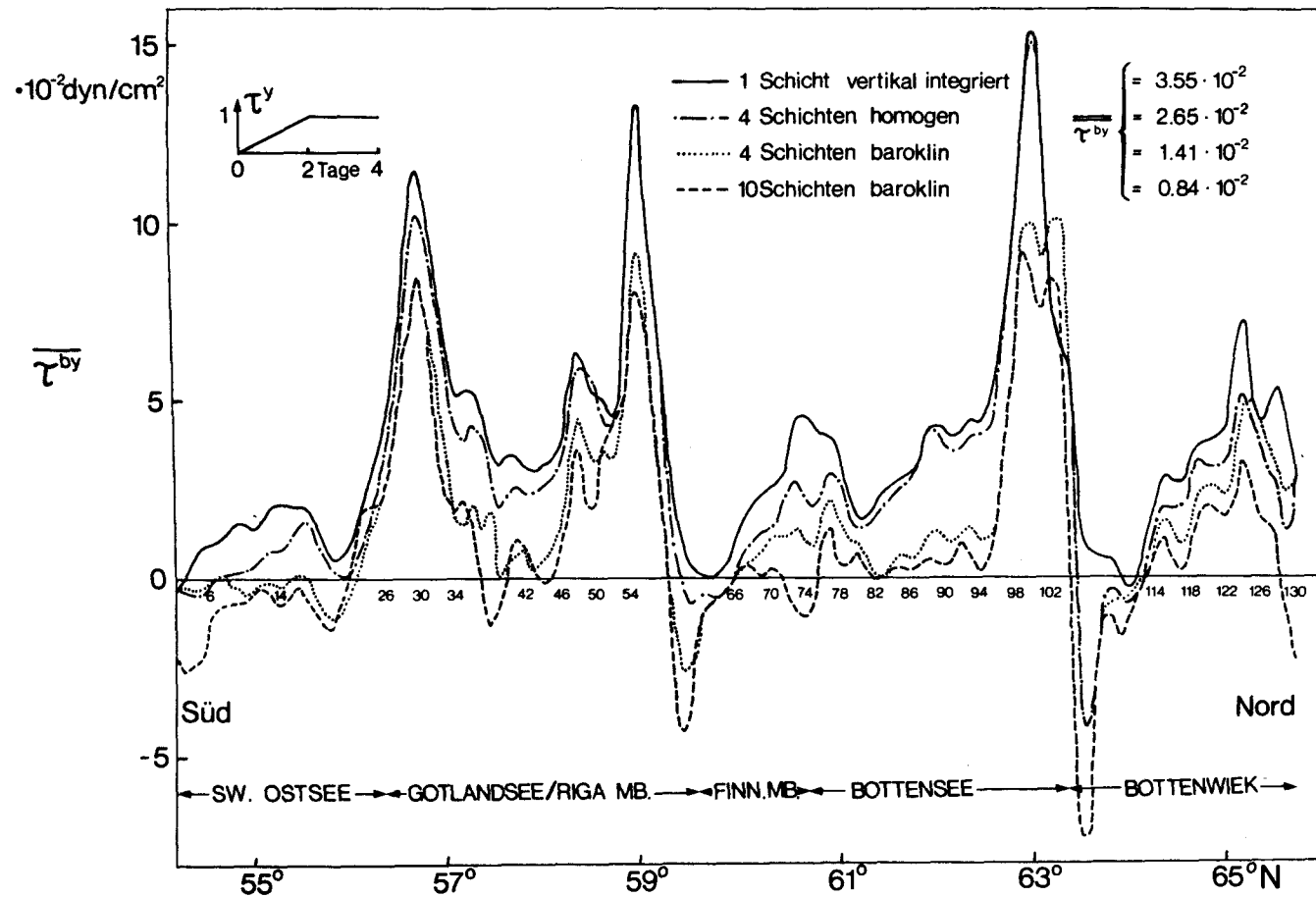


Abb. 2.2-2

Ost/West-Mittel der Bodenschubspannung τ_{by} der homogenen bzw. geschichteten Ostsee nach 4 Tagen Südwind. τ_{by} ist der Gesamtmittelwert. (siehe Text §2.2.1)

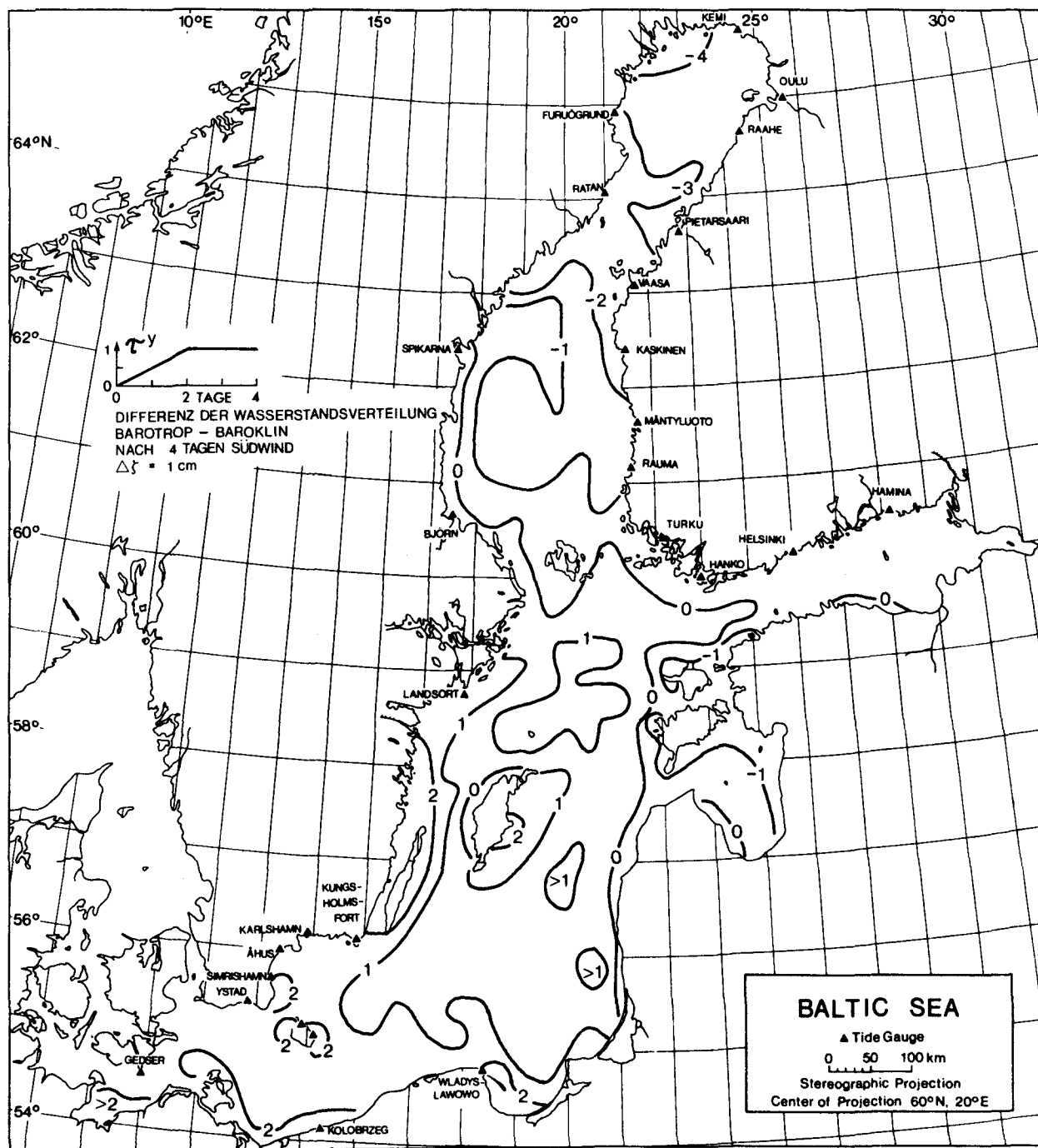


Abb. 2.2-4

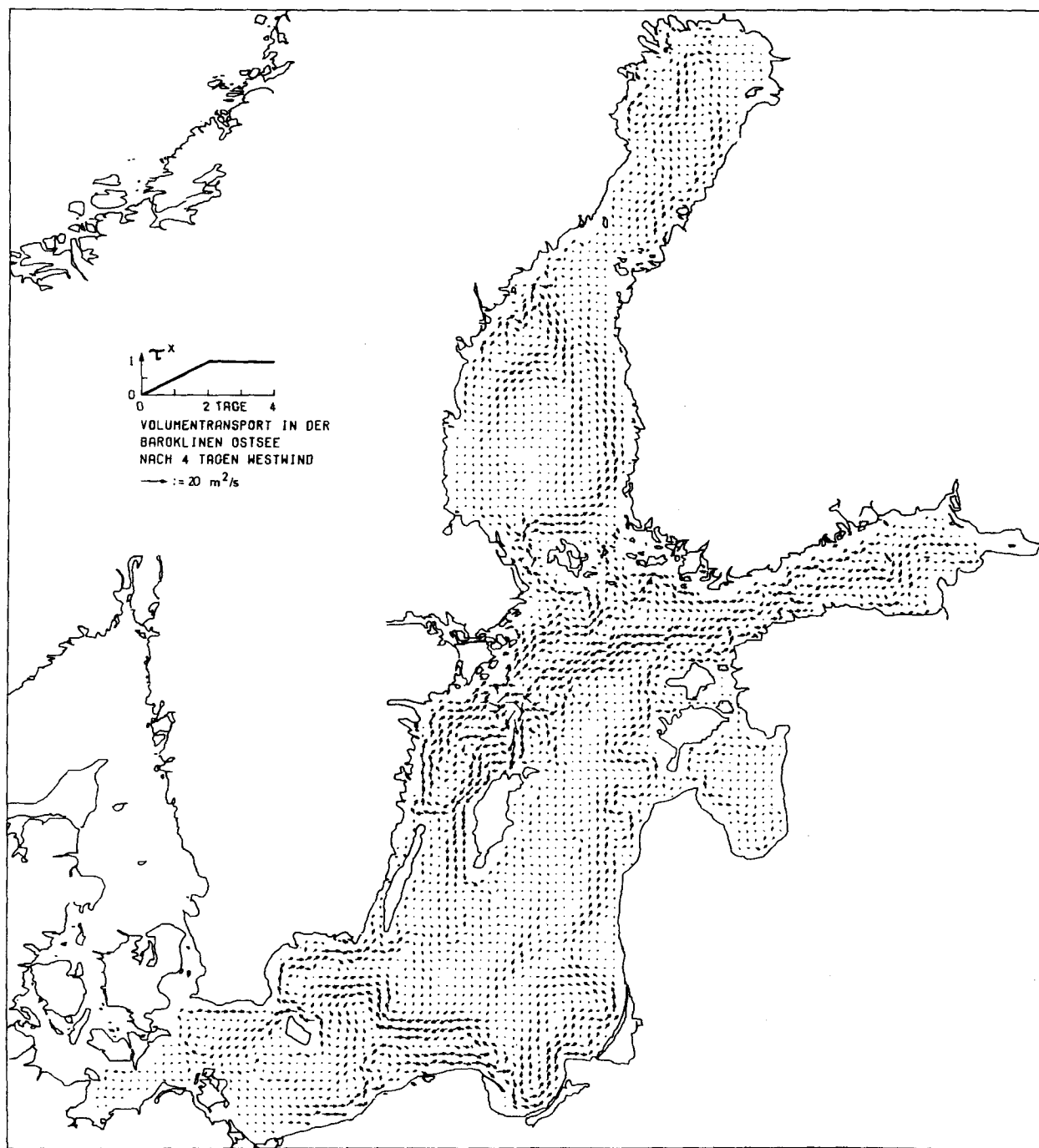


Abb. 2.2-5

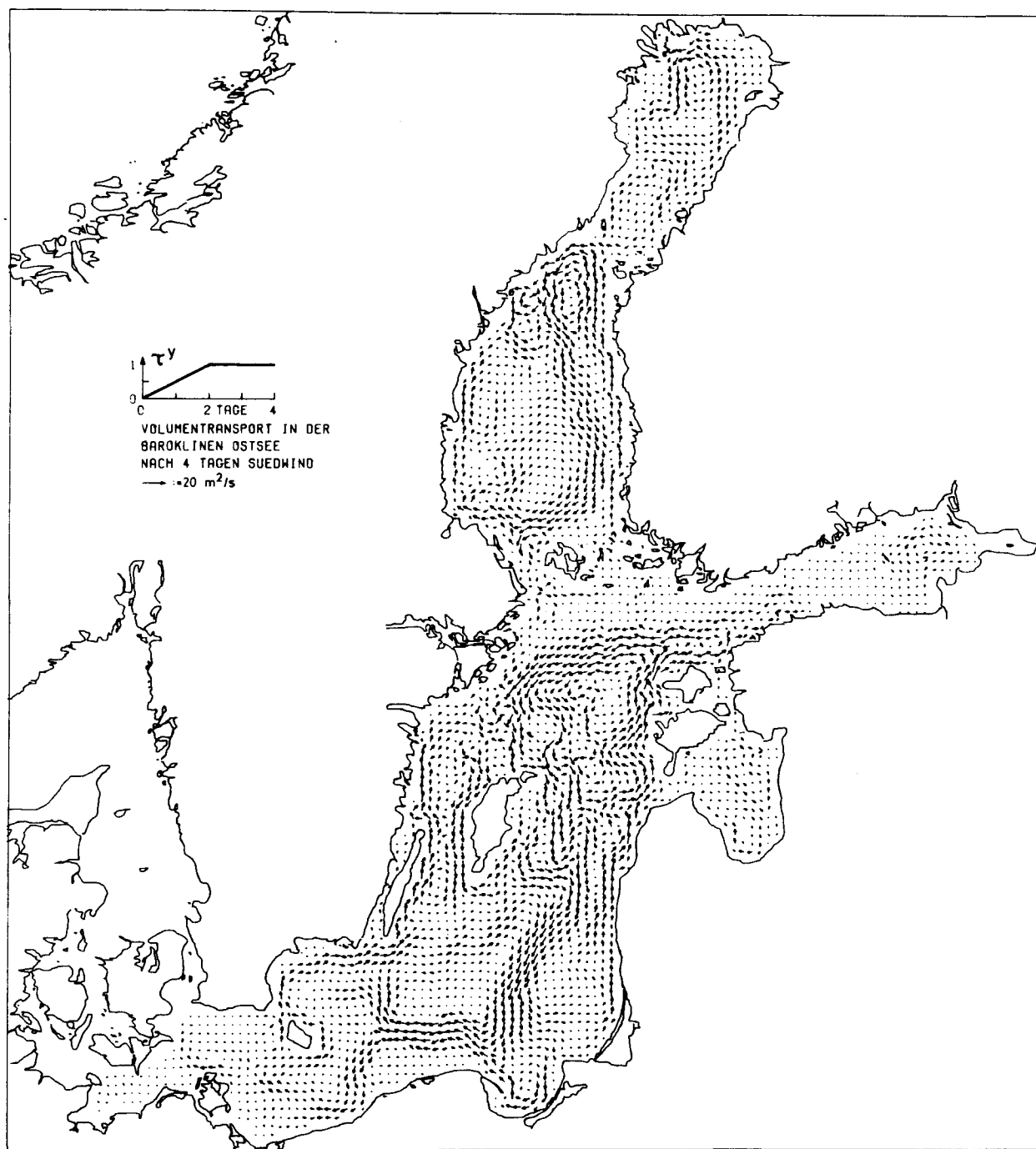


Abb. 2.2-6

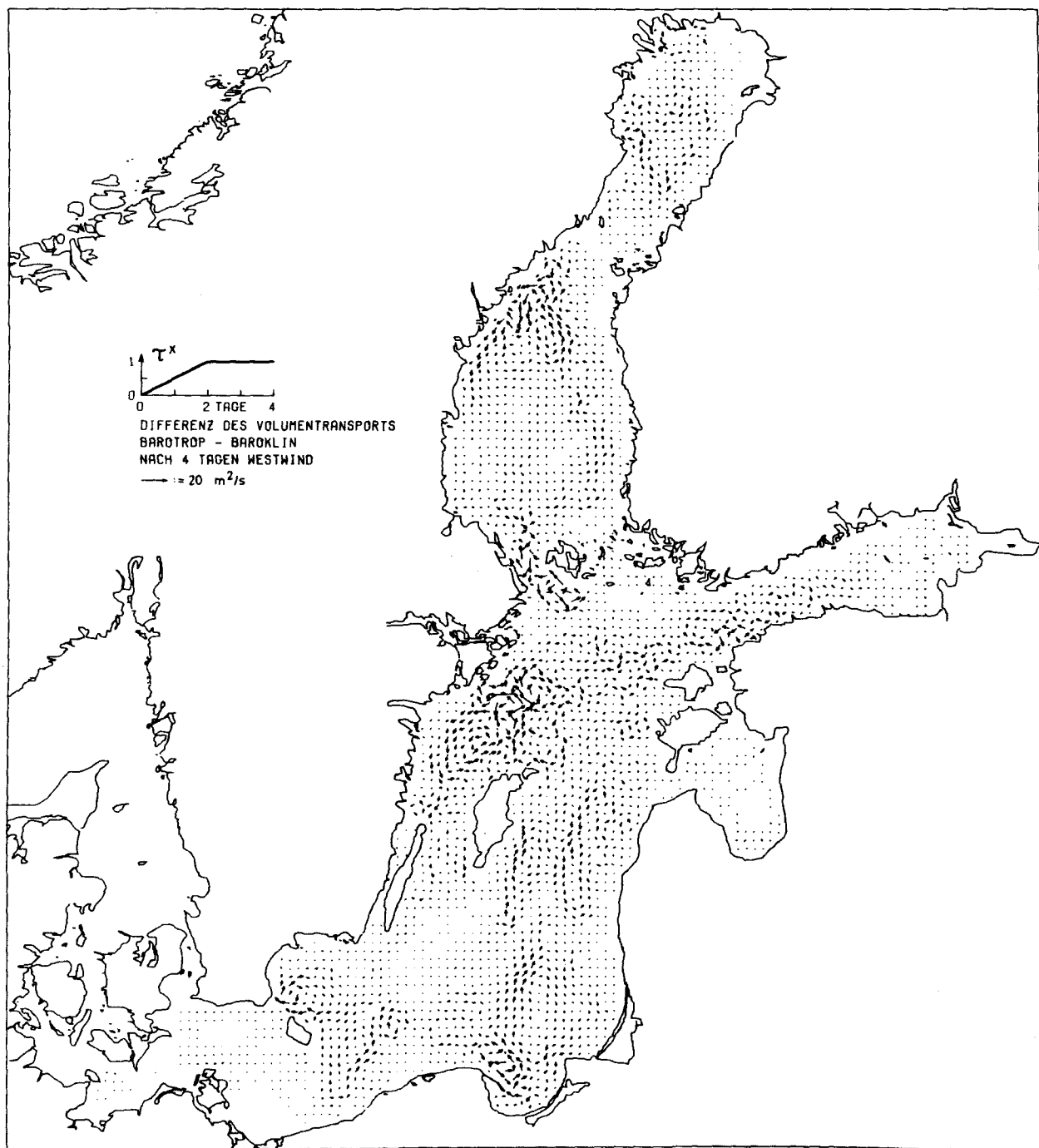


Abb. 2.2-7

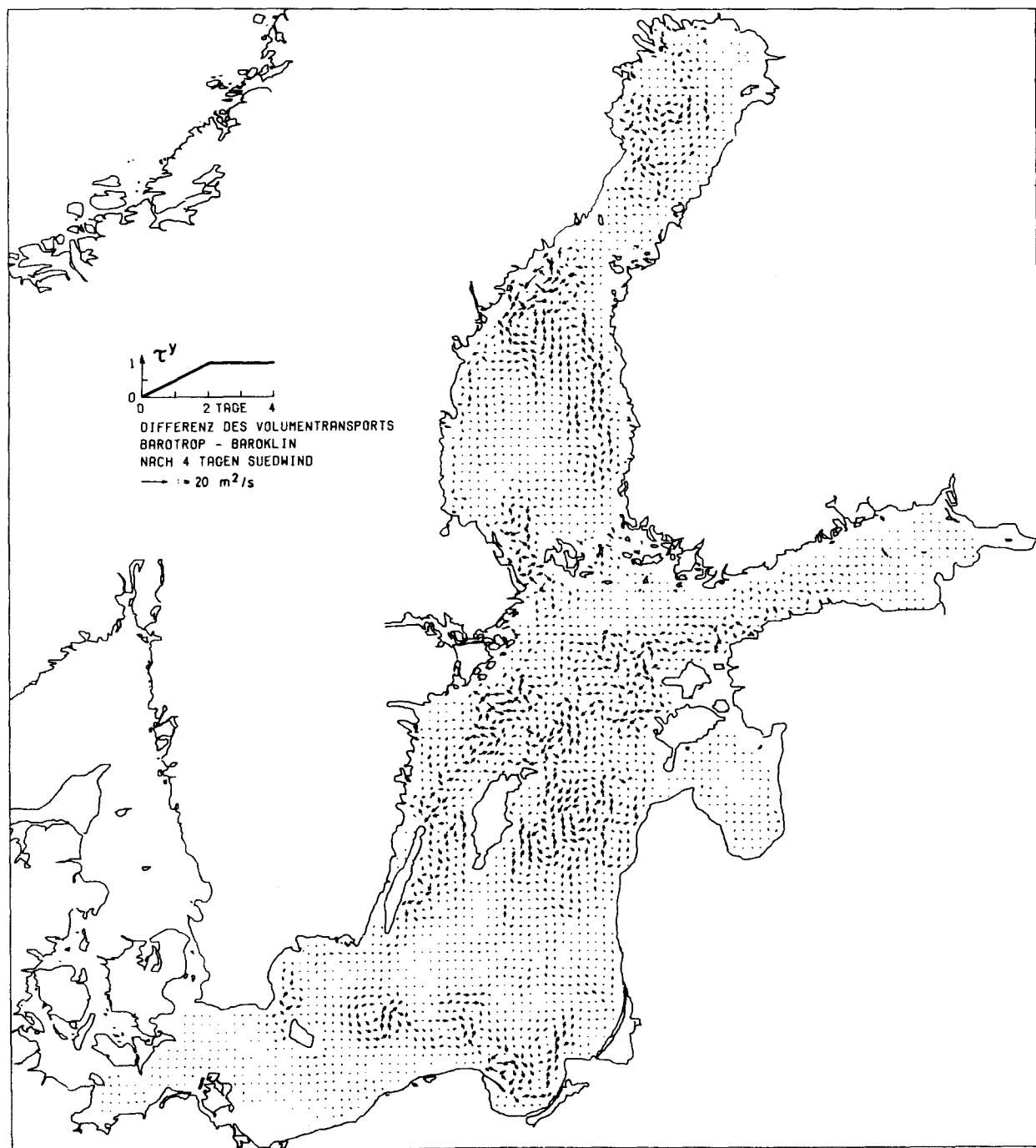


Abb. 2.2-8

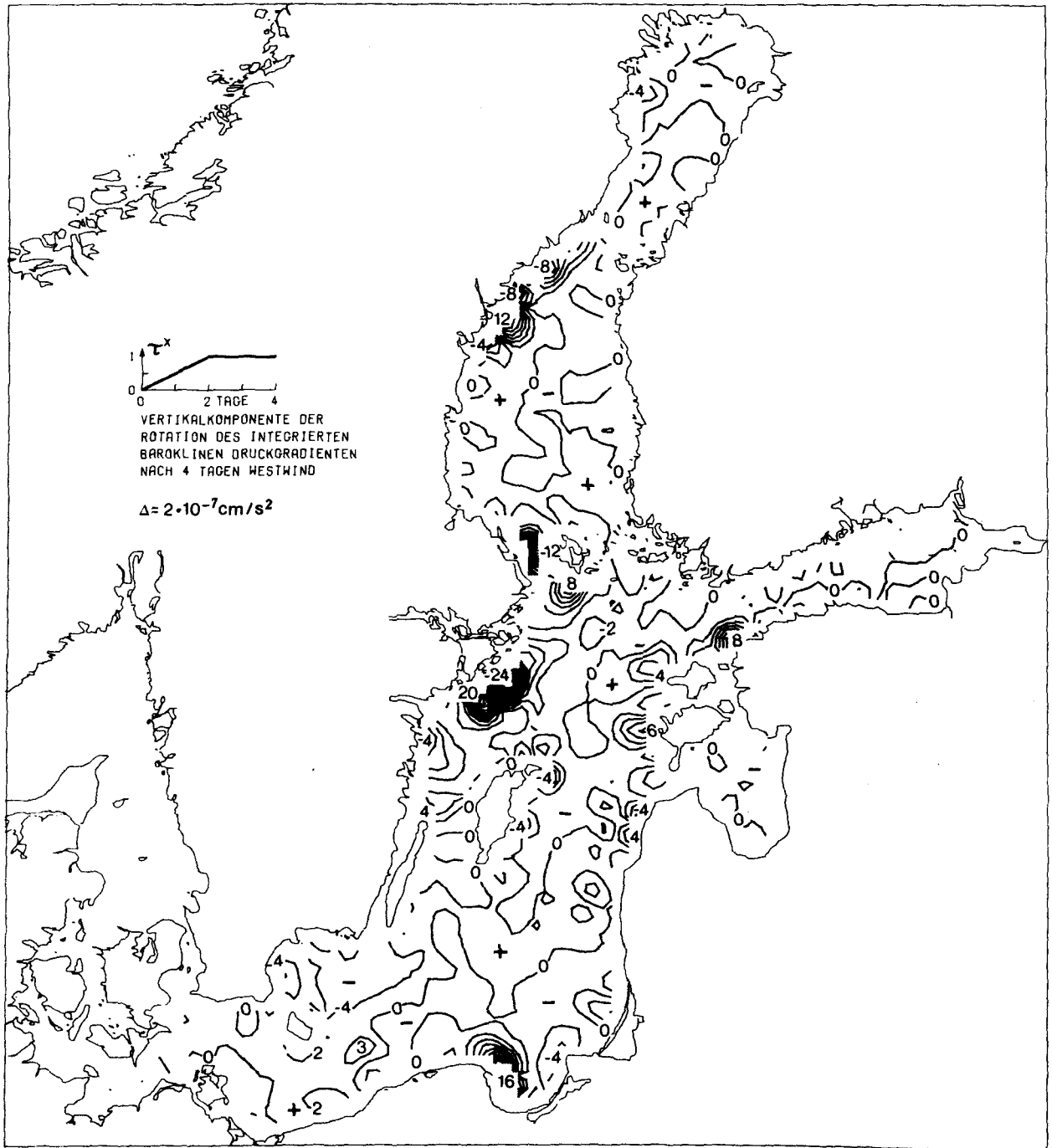


Abb. 2.2-9

Geglättete Verteilung des Terms $(\nabla \times H \bar{P}_i)_z$ bei Westwind in
Einheiten 10^7 cm/s^2 . (s. Text §2.2.2)

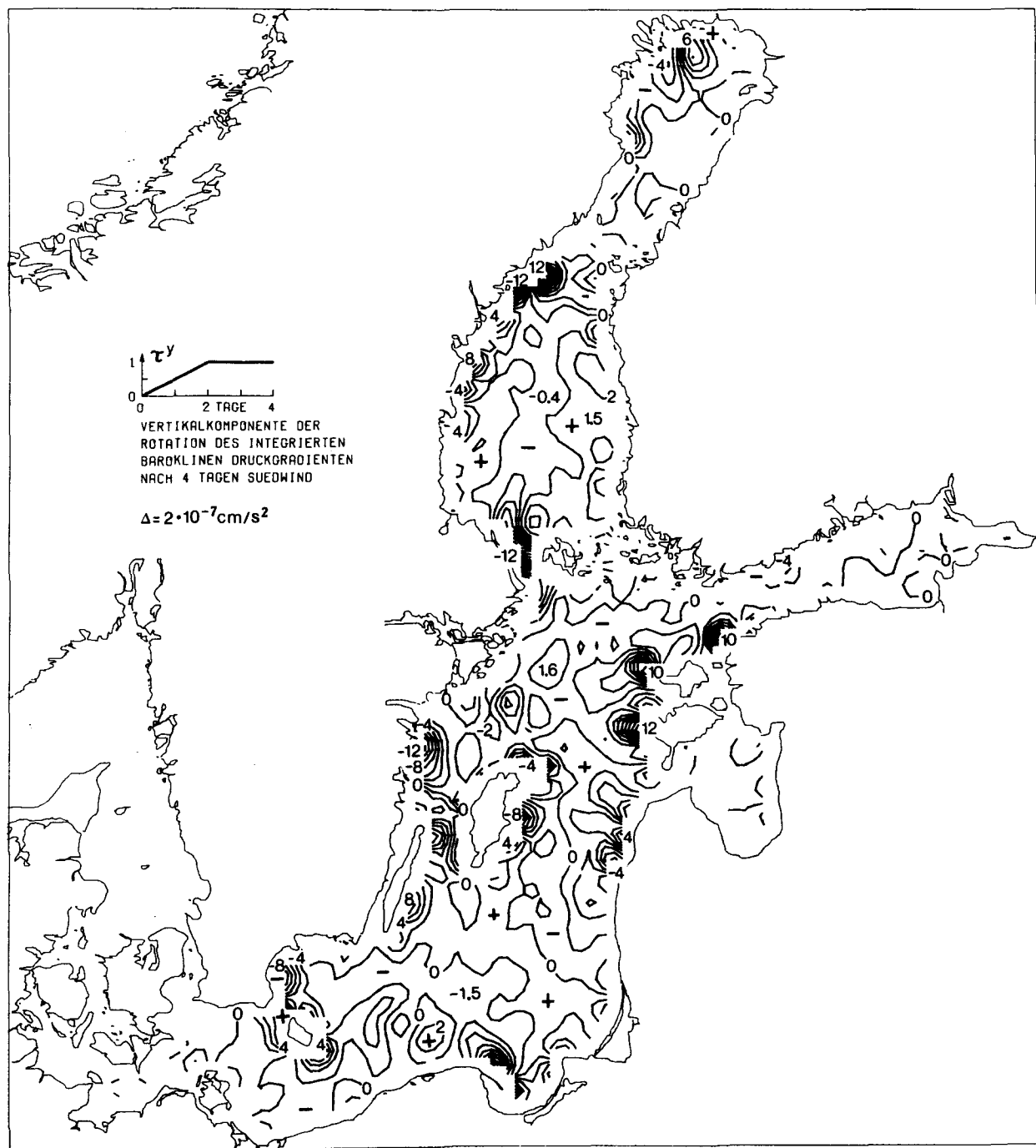


Abb. 2.2-10

Geglättete Verteilung des Terms $(\nabla \times \mathbf{H} \mathbf{P}_1)_z$ bei Südwind in
Einheiten 10^7 cm/s^2 . (s. Text §2.2.2)

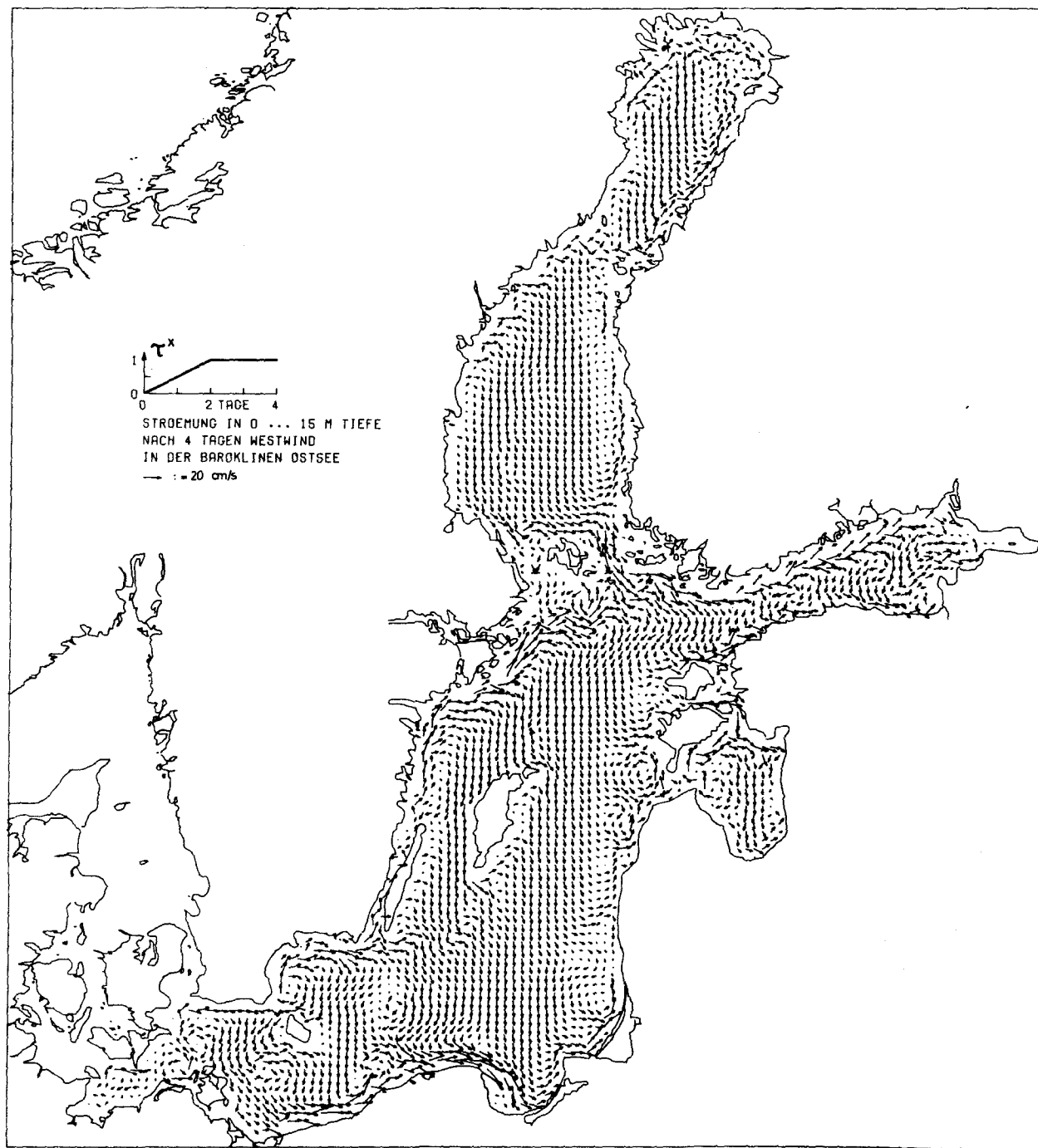


Abb. 2.2-11

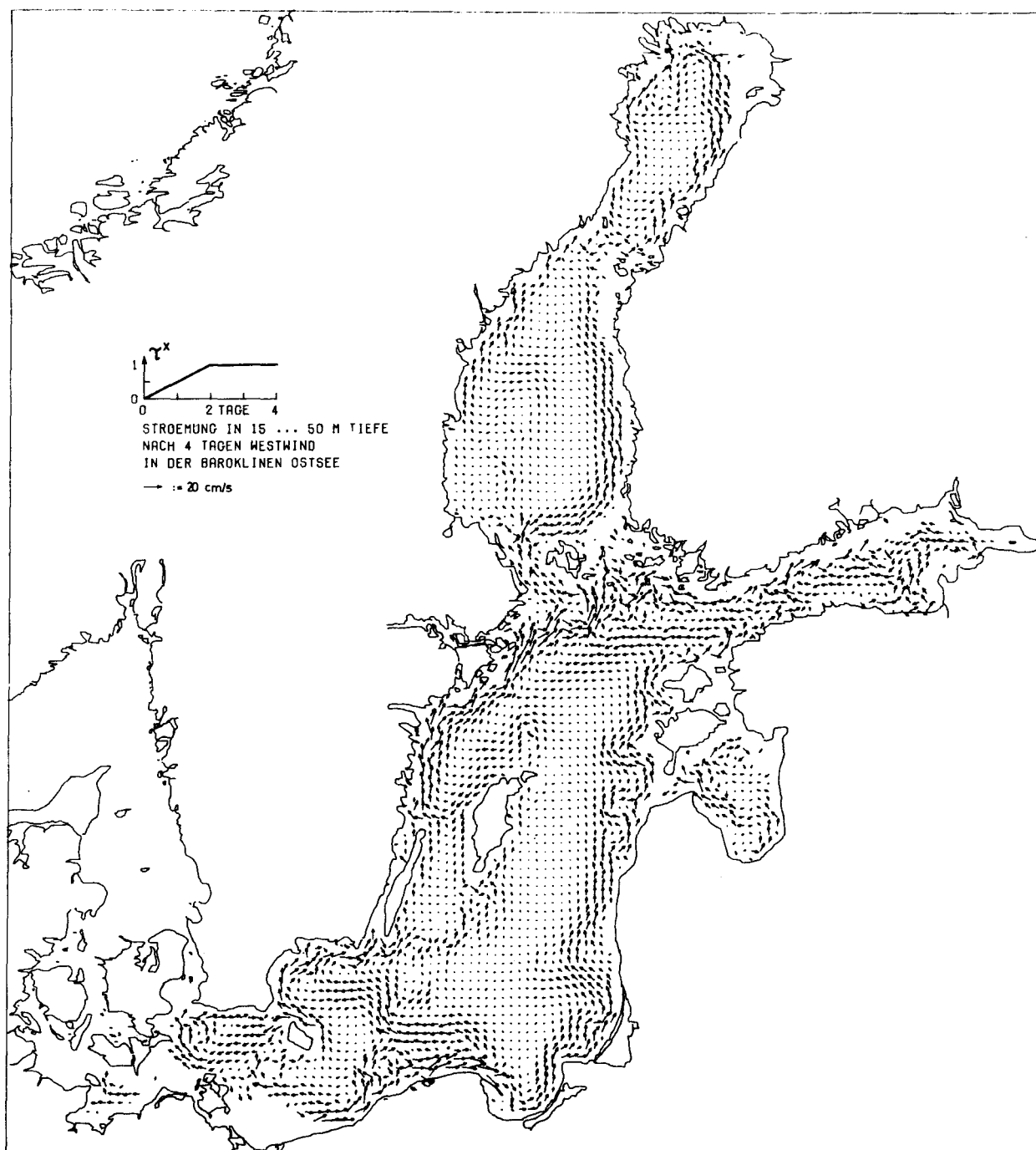


Abb. 2.2-12

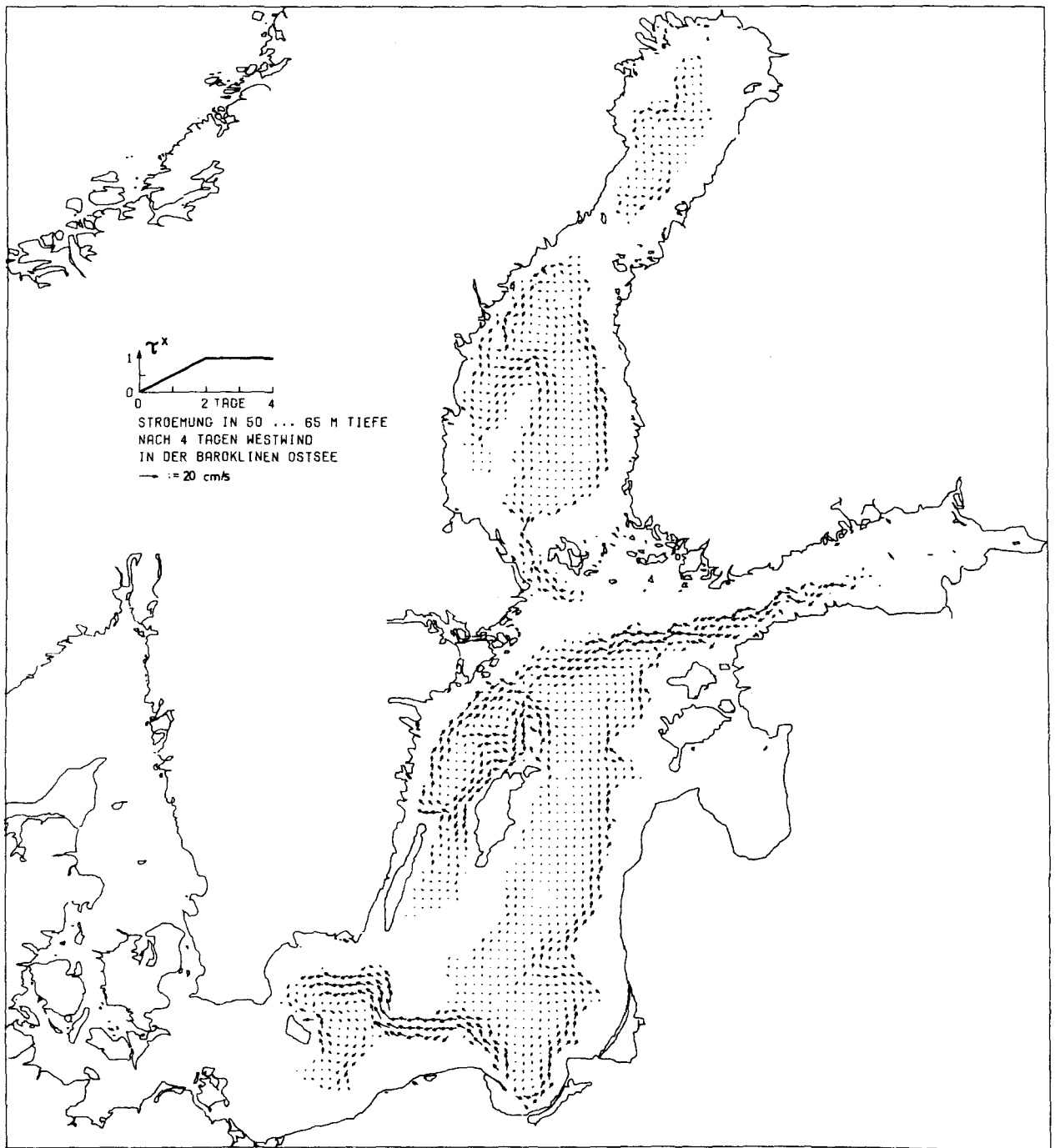


Abb. 2.2-13

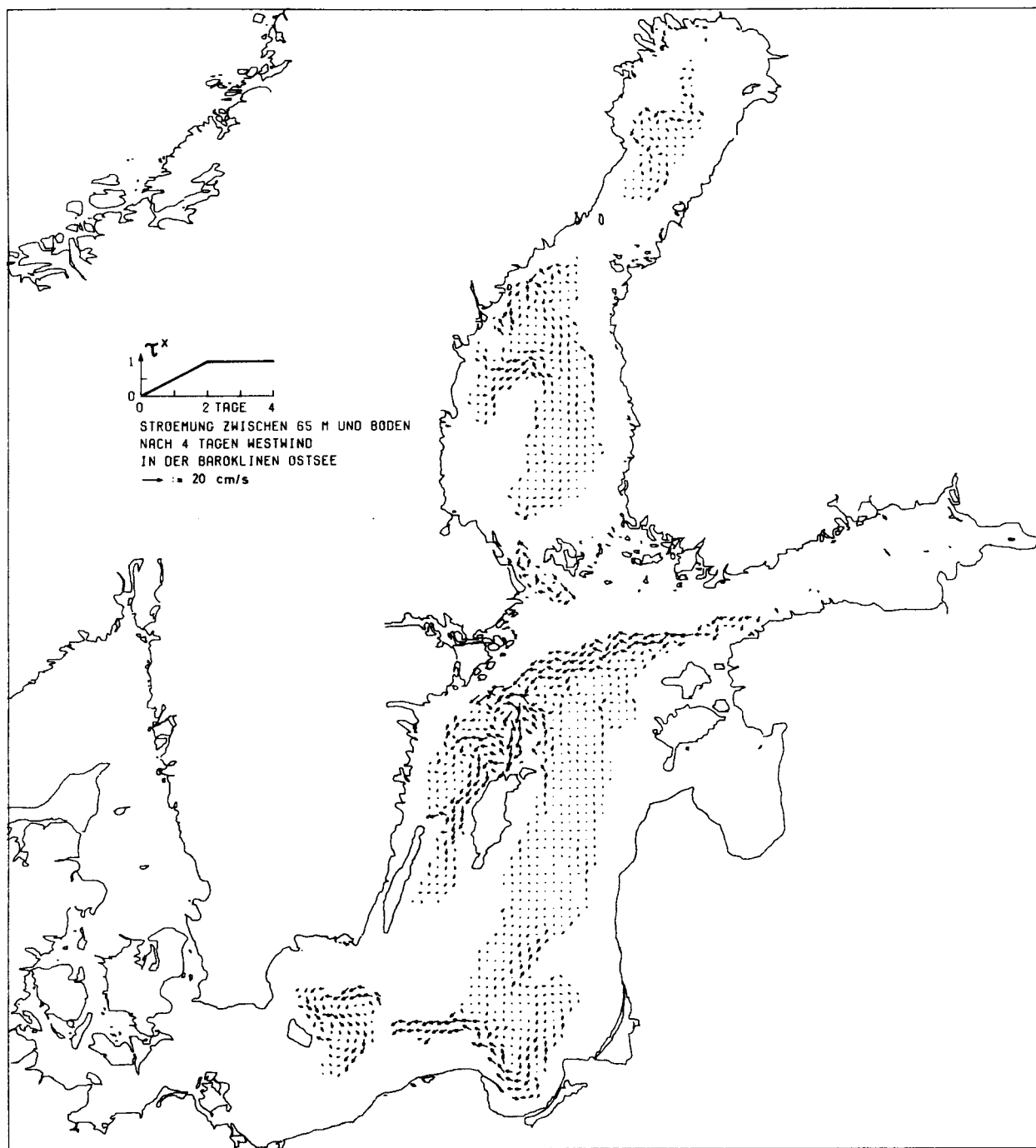


Abb. 2.2-14

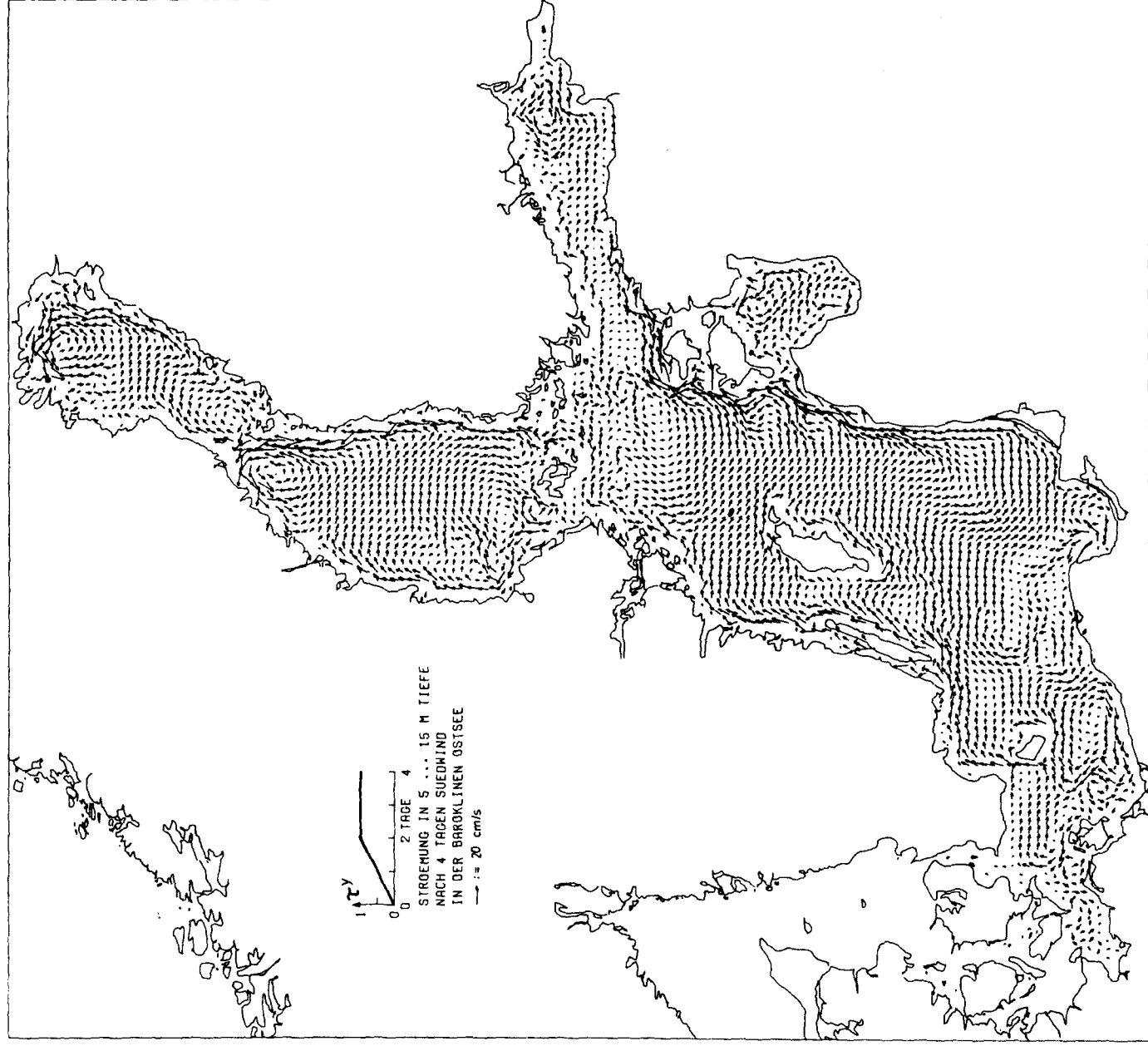


Abb. 2.2-15

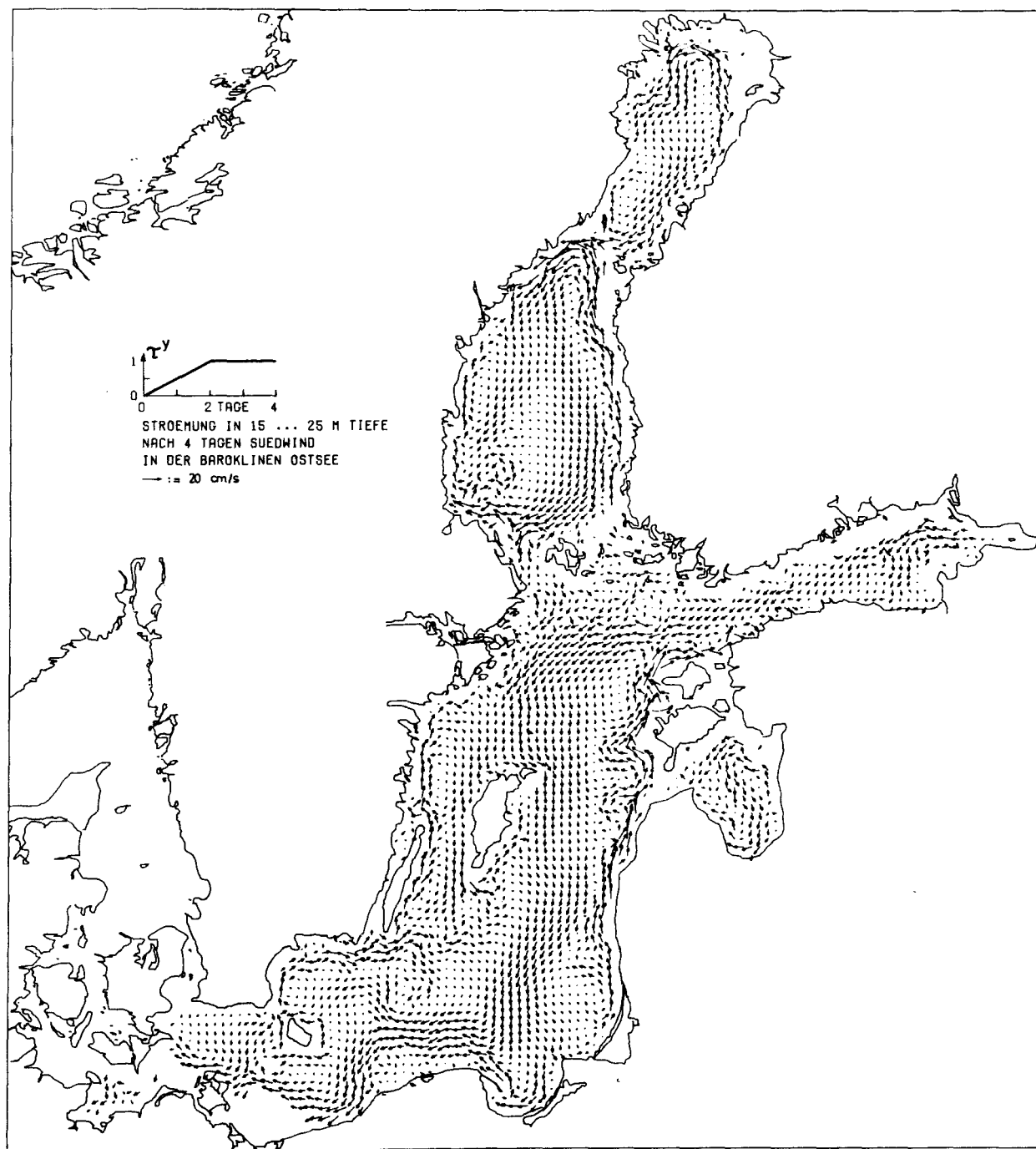


Abb. 2.2-16

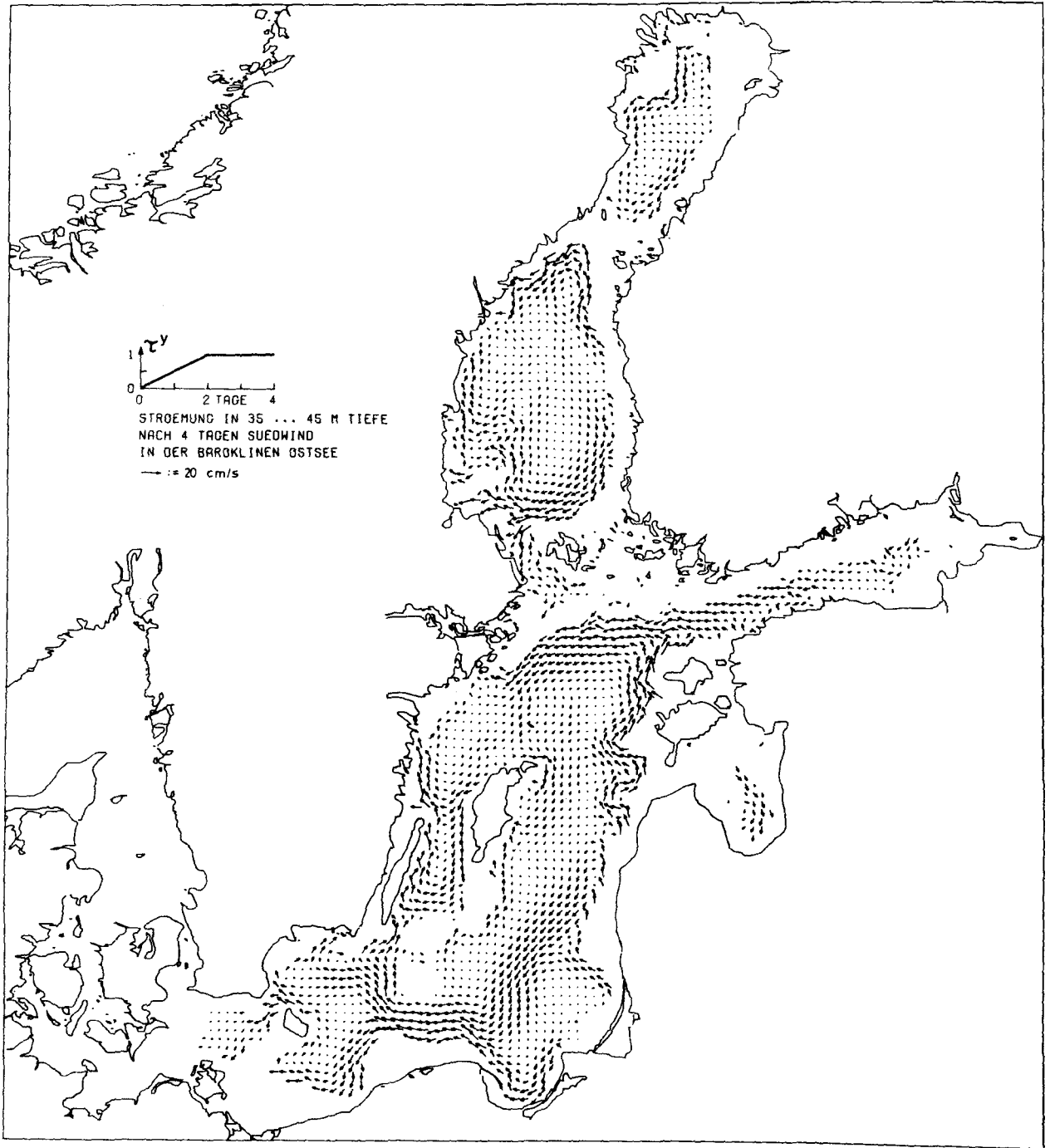


Abb. 2.2-16A

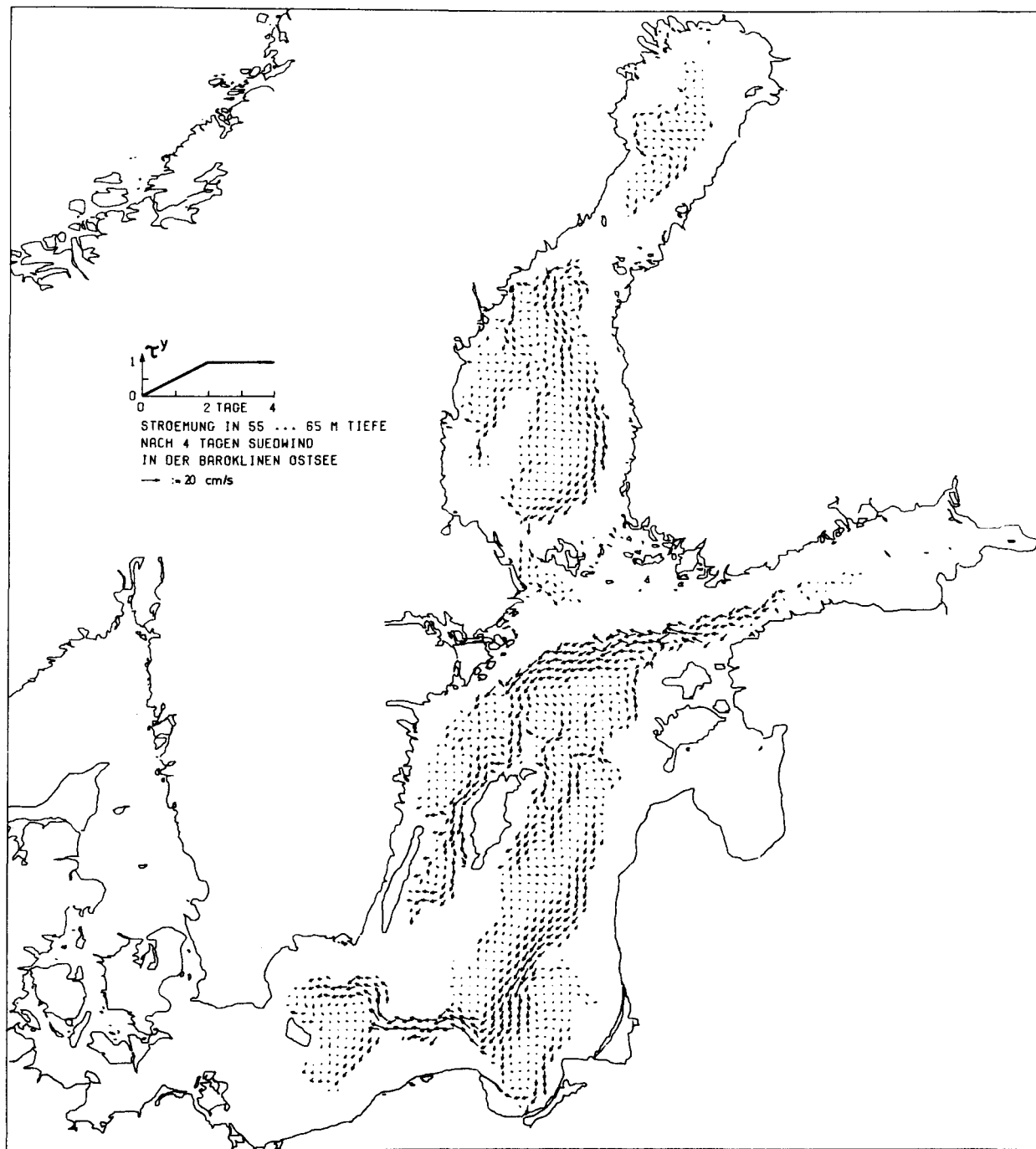


Abb. 2.2-17

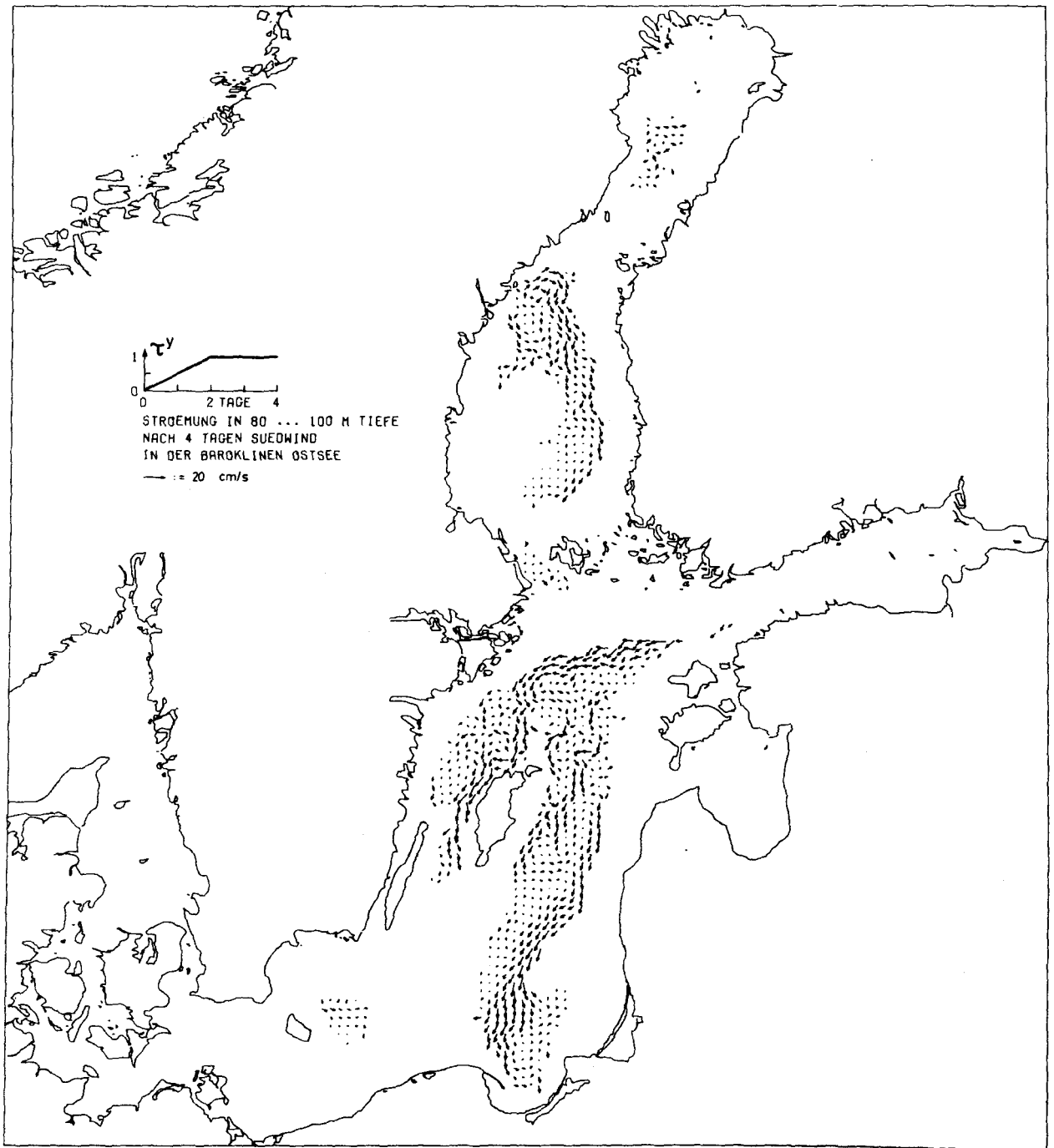


Abb. 2.2-18

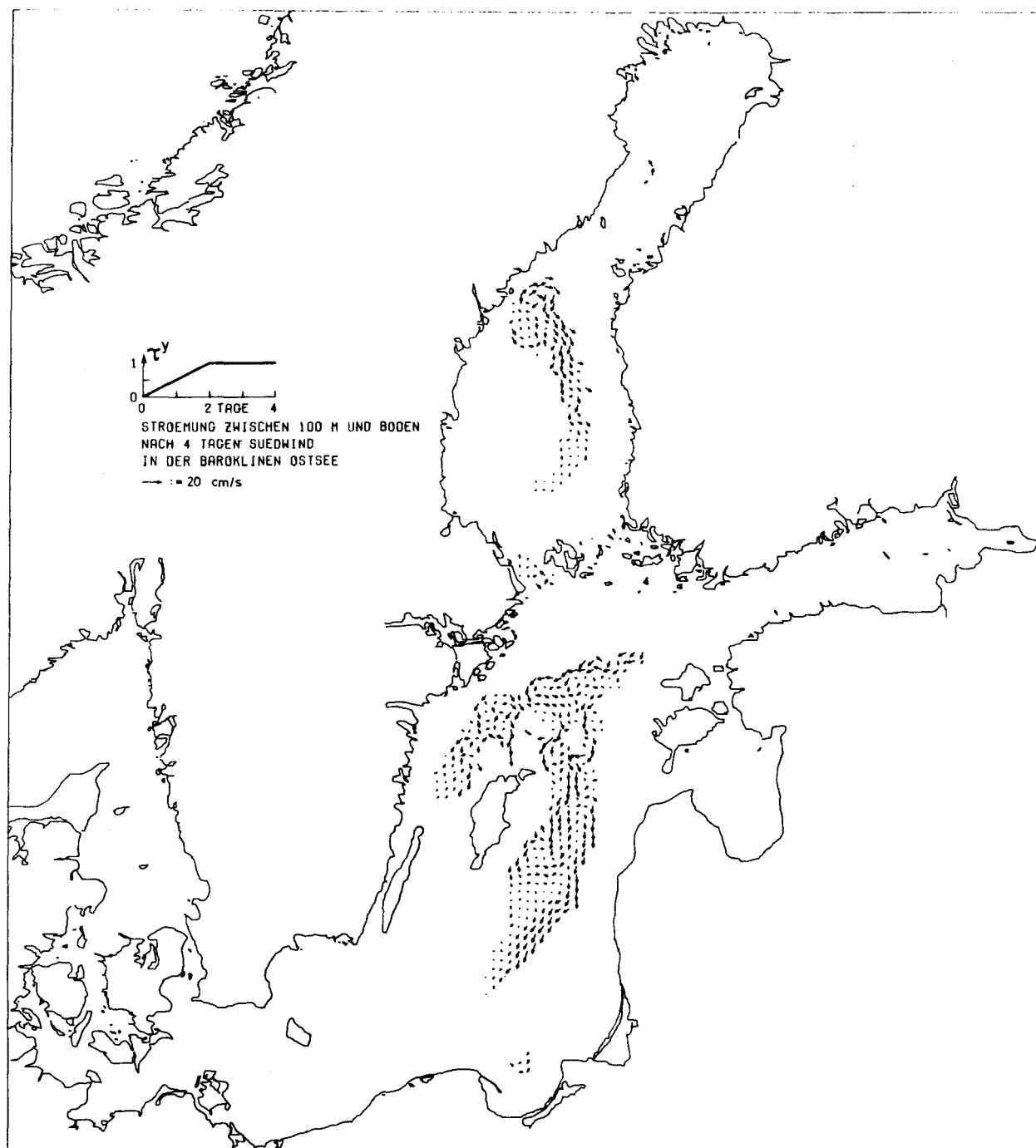


Abb. 2.2-19

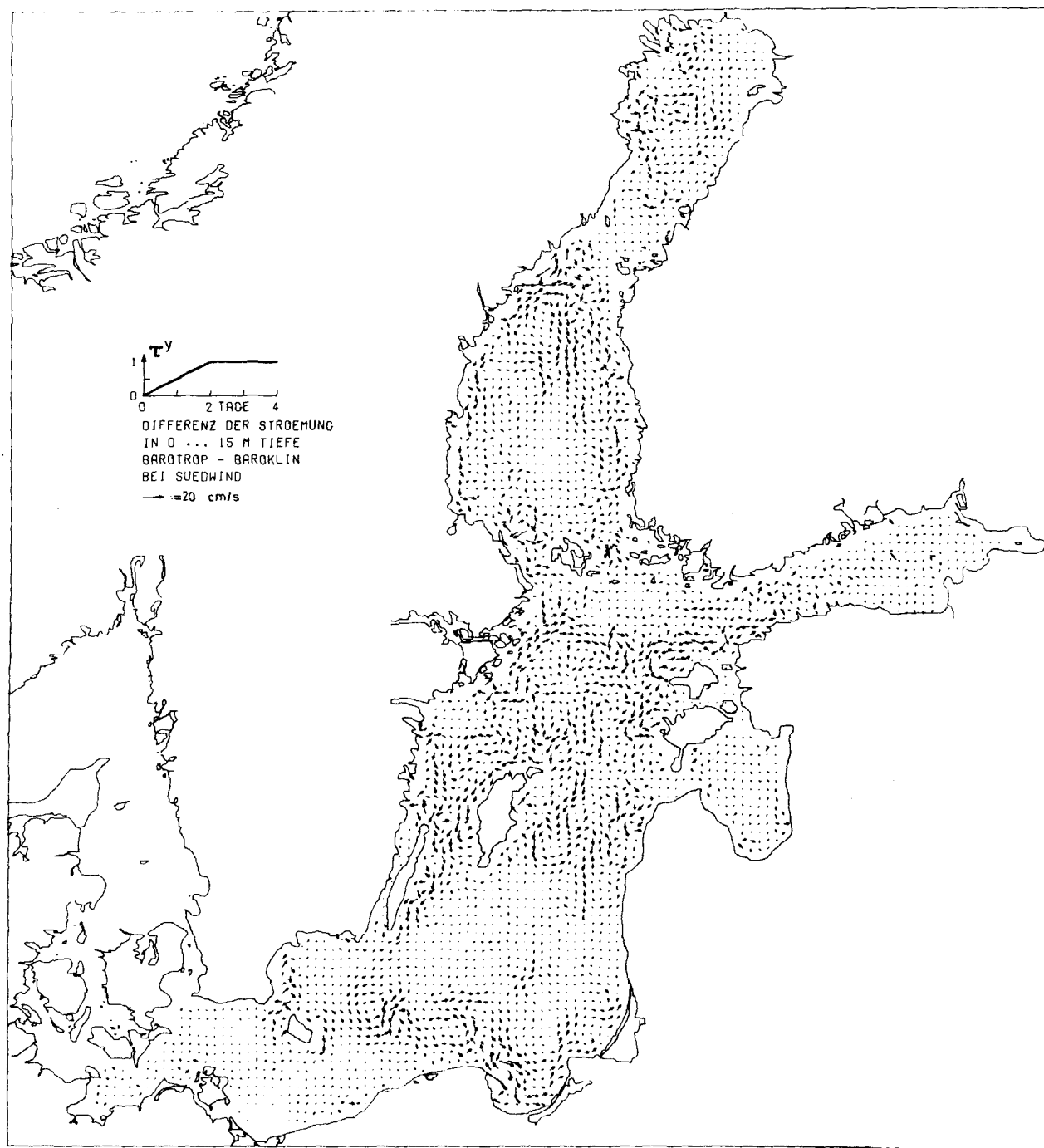


Abb. 2.2-20

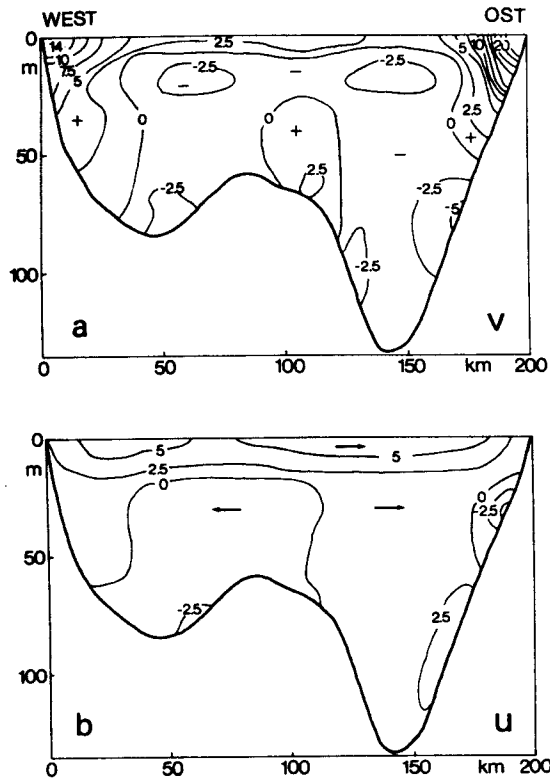


Abb. 2.2-21

Barokline Strömung entlang Ost/West-Schnitt
12 (s. Abb.2.1-6) bei Südwind.10 Schichten.
(a) Nordkomponente cm/s, (b) Ostkomponente cm/s

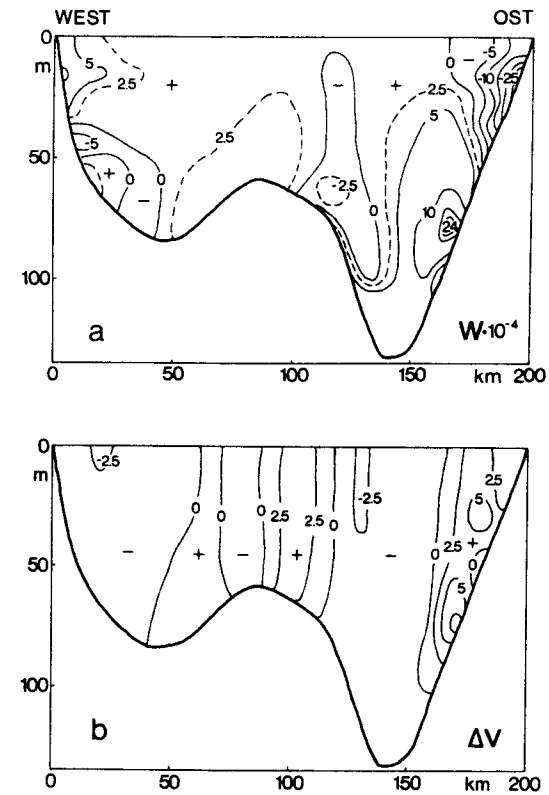


Abb. 2.2-22

(a) Zu Abb. 2.2-21 gehörige Vertikalge-
schwindigkeit in Einheiten 10^{-4} cm/s
(b) Differenz von barotroper-barokliner
Stromgeschwindigkeit (Nordkomponente cm/s).

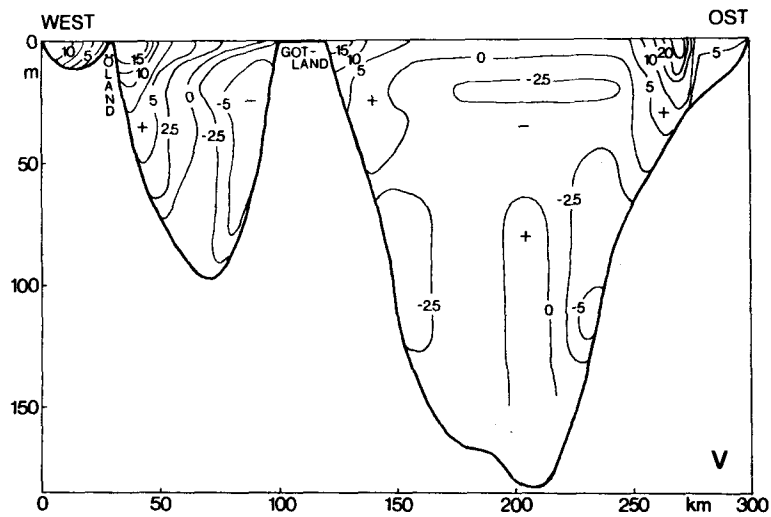


Abb. 2.2-23

Nordkomponente der baroklinen Strömung in der südlichen Gotlandsee entlang Ost/West-Schnitt 6 (s.Abb. 2.1-6).
Einheiten in cm/s. Südwindlage.

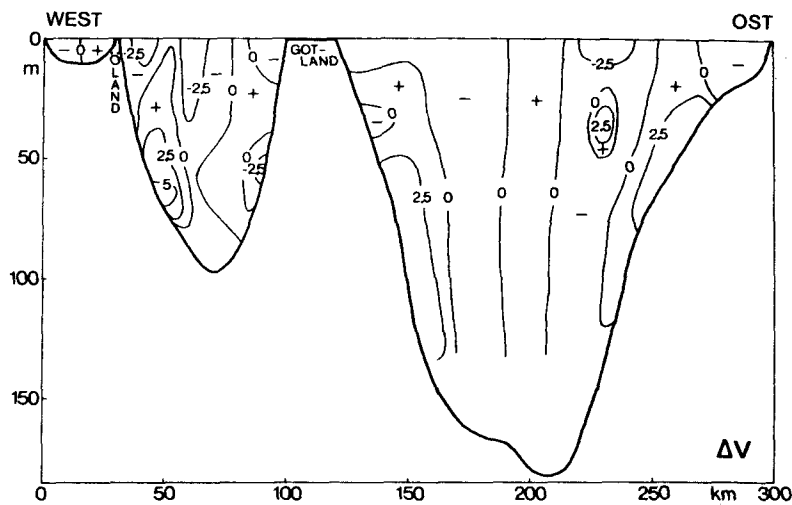


Abb. 2.2-24

Differenz der Nordkomponente in cm/s zwischen barotroper
-barokliner Rechnung, im übrigen wie in Abb.2.2-23 .

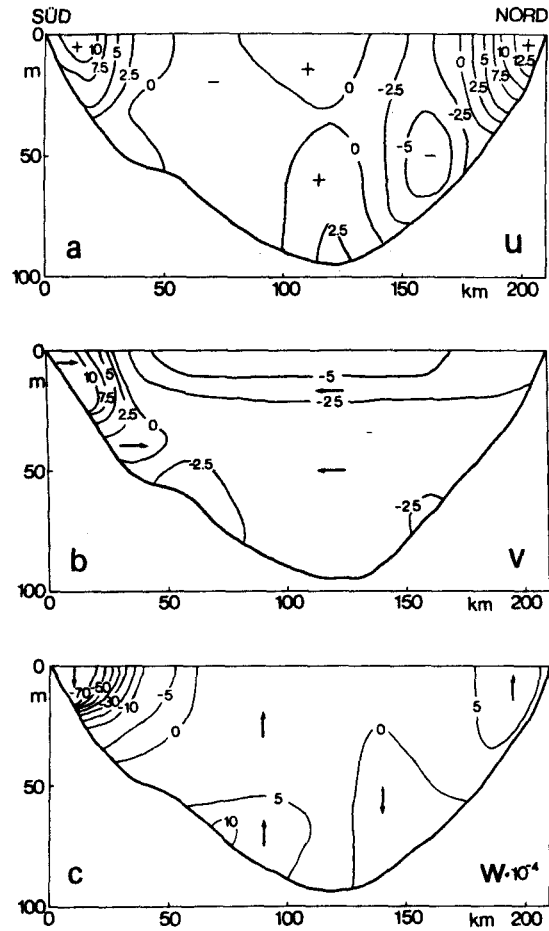


Abb. 2.2-25

Barokline Strömungen in der Bornholmsee entlang
Nord/Süd-Schnitt 4 (s. Abb.2.1-6), Westwind.

(a) Ostkomponente in cm/s (b) Nordkomponente in cm/s
(c) Vertikalgeschwindigkeit in 10^{-4} cm/s

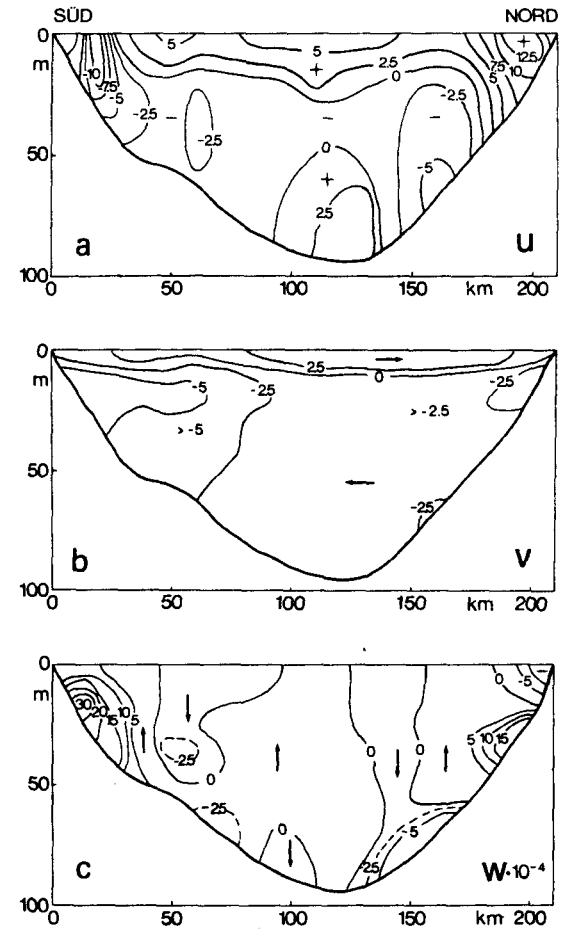


Abb. 2.2-26

Wie in Abb. 2.2-25 bei Südwind

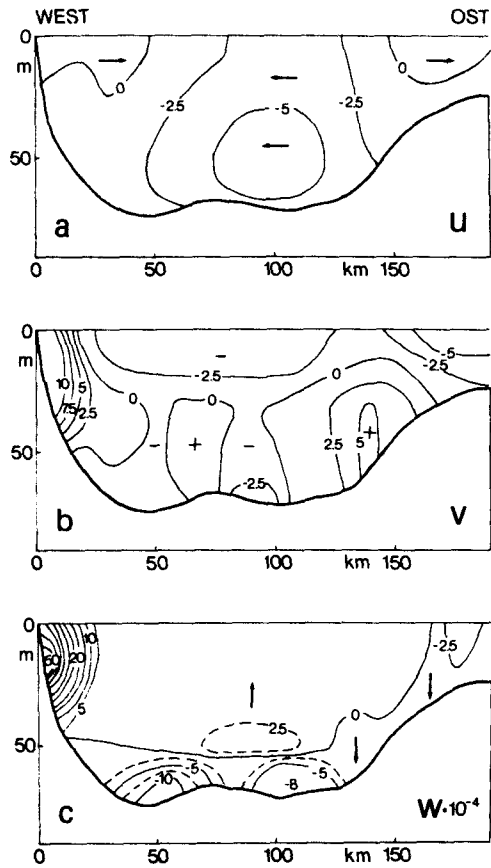


Abb. 2.2-27

Wie in Abb. 2.2-25, aber entlang Ost/West-Schnitt 4a (s. Abb. 2.1-6), Westwind.

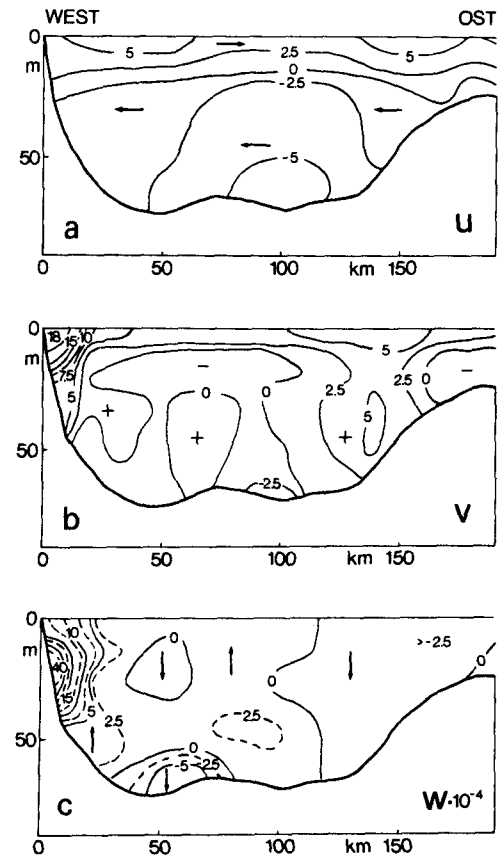


Abb. 2.2-28

Wie in Abb. 2.2-26, aber entlang Ost/West-Schnitt 4a (s. Abb. 2.2-7), Südwind.

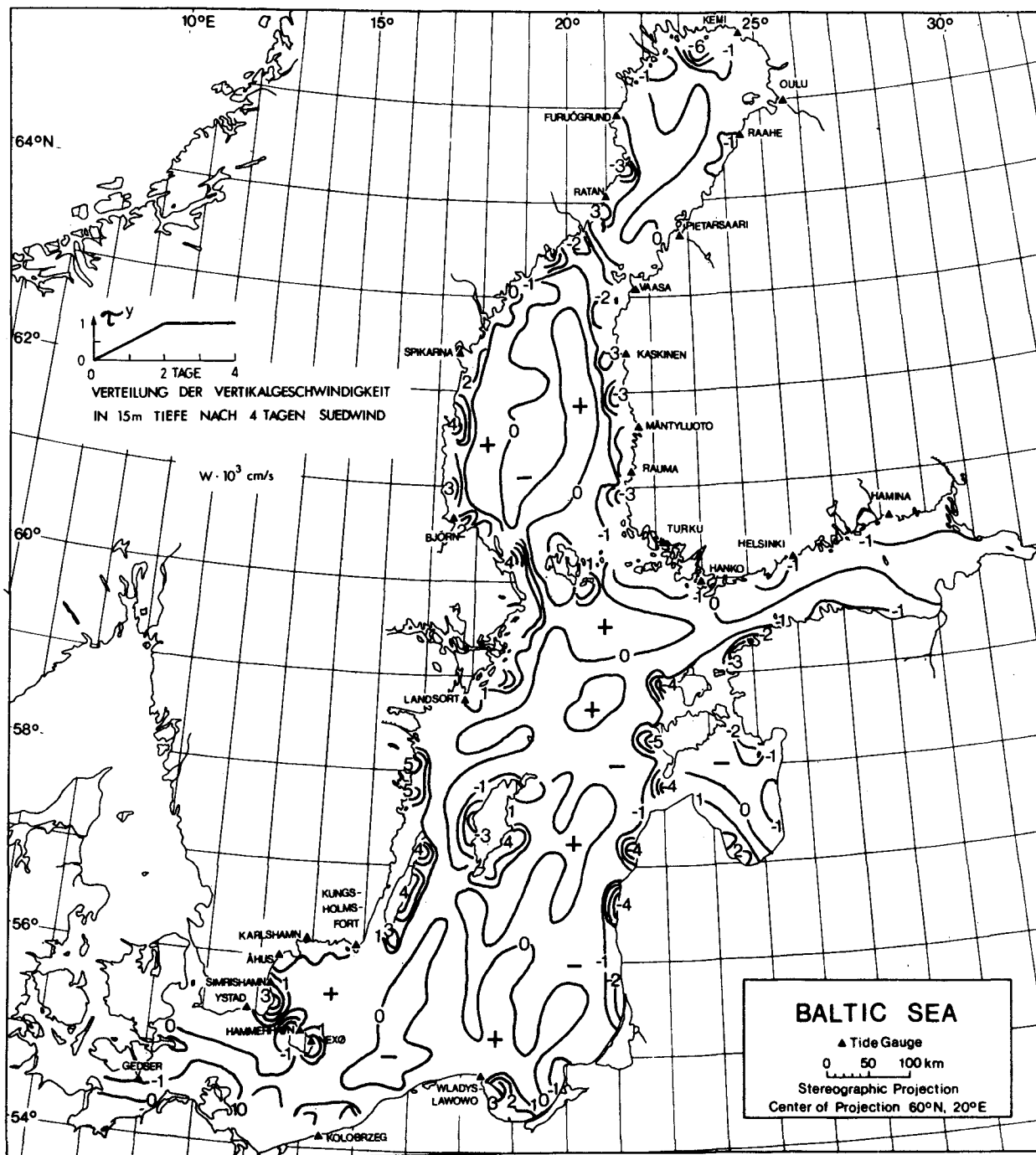


Abb. 2.2-29

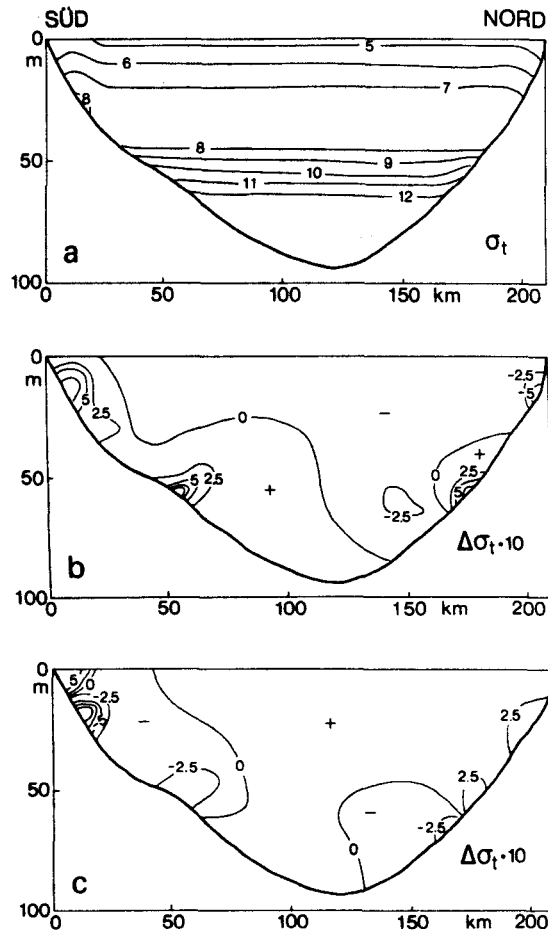


Abb. 2.2-31

- (a) σ_t -Linien entlang Schnitt 4 (s. Abb.2.1-7) nach 4 Tagen Südwind
 (b) Wie (a), jedoch σ_t -Anomalien (10-fach)
 (c) Wie (b), jedoch bei Westwind.

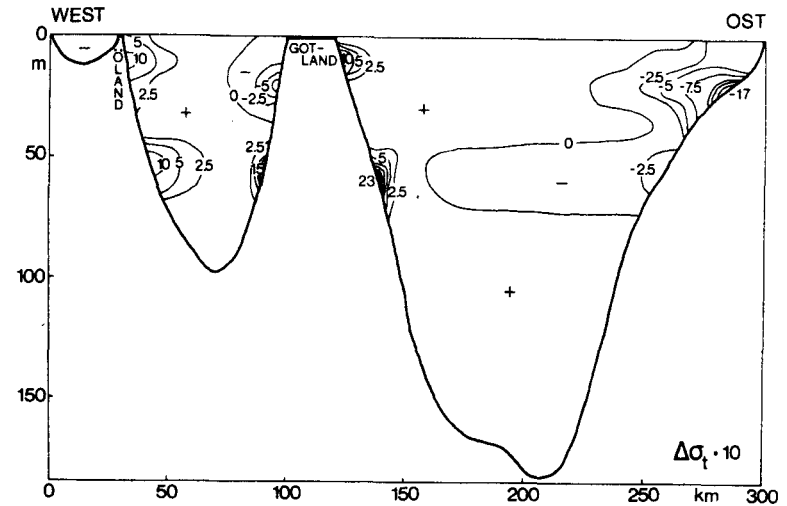


Abb. 2.2-32

σ_t -Anomalien (10-fach) entlang Schnitt 6
 (s. Abb. 2.1-7) in der südlichen Gotlandsee bei
 Südwindlage.

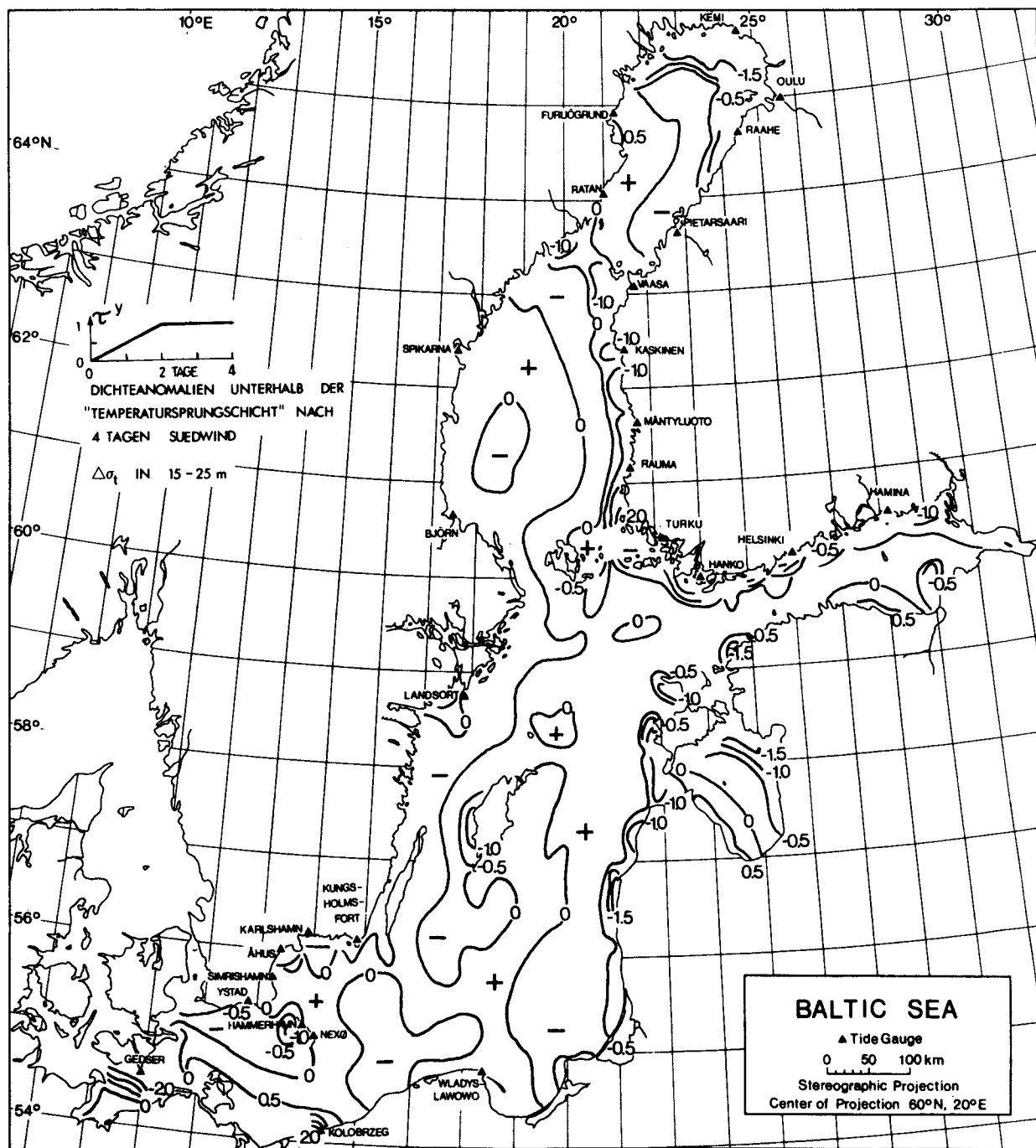
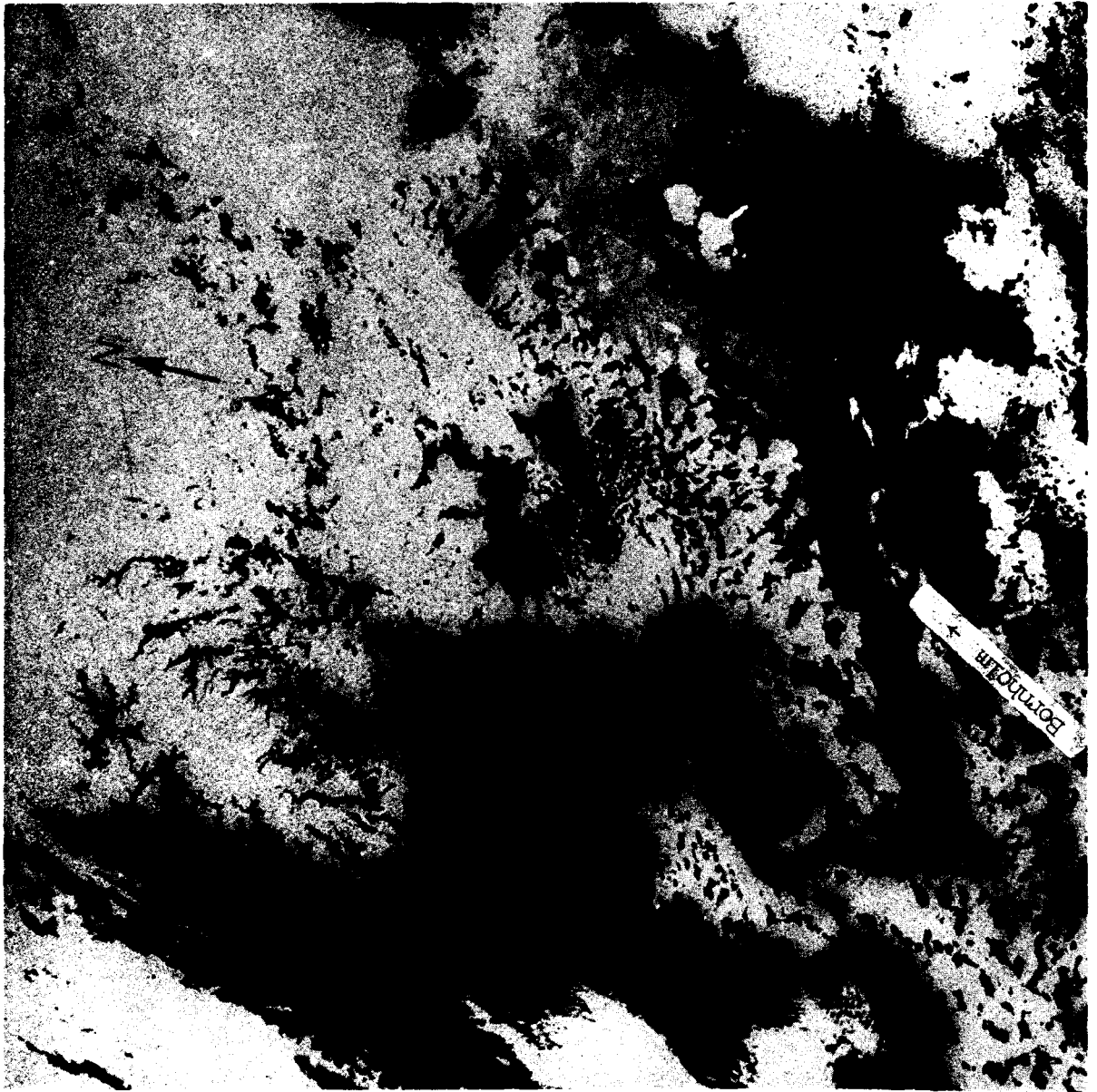


Abb. 2.2-34



↑
(Bornholm, etwa 3 cm nach oben)

Abb. 2.3-1

Infrarotaufnahme der Ostsee vom 21.4.1980 (Hardtke, 1980)

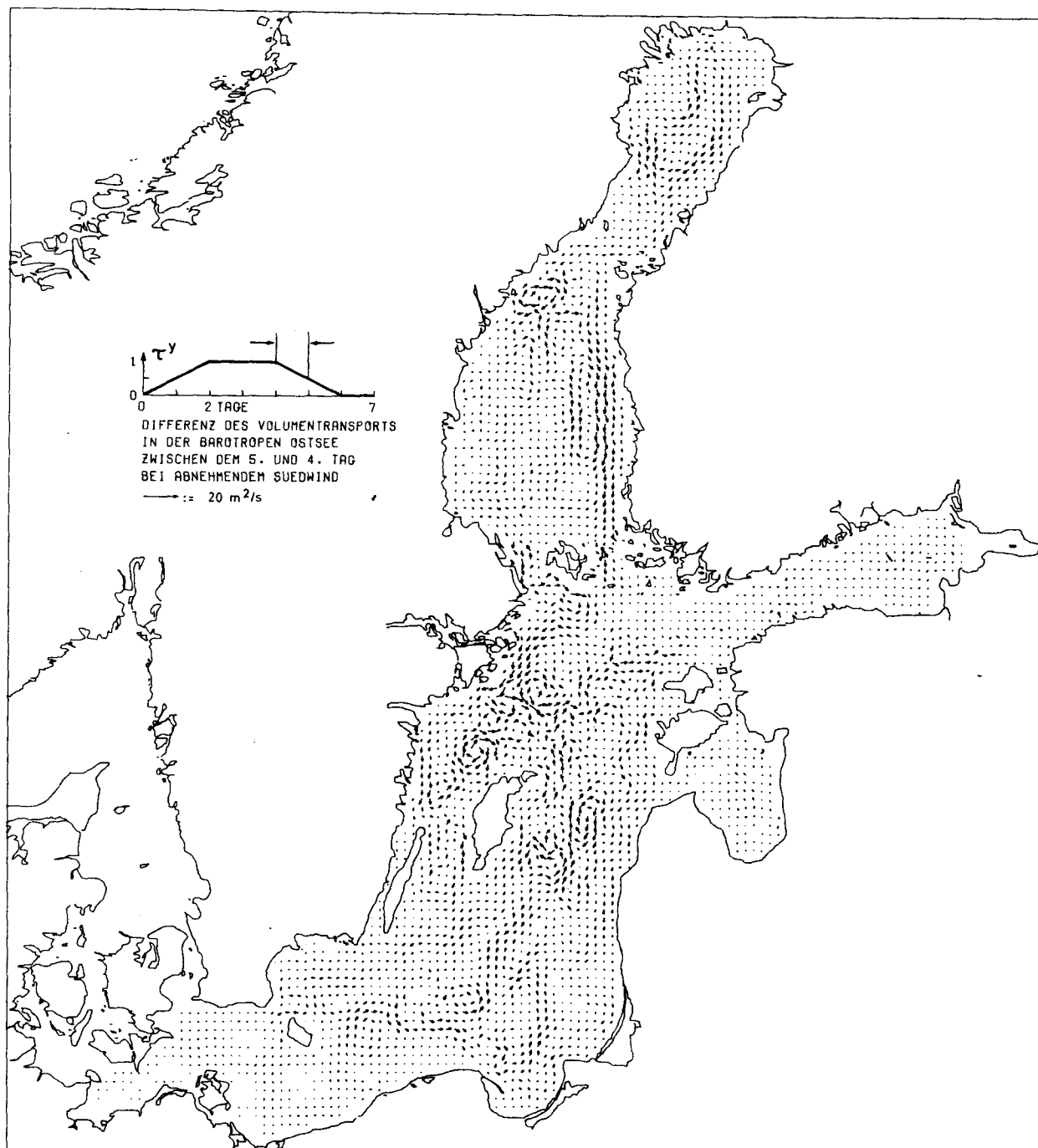


Abb. 2.3-2

(Pfeile im Bildeinsatz oben links zeigen Zeitpunkte, zwischen denen die Transportdifferenz berechnet wurde)

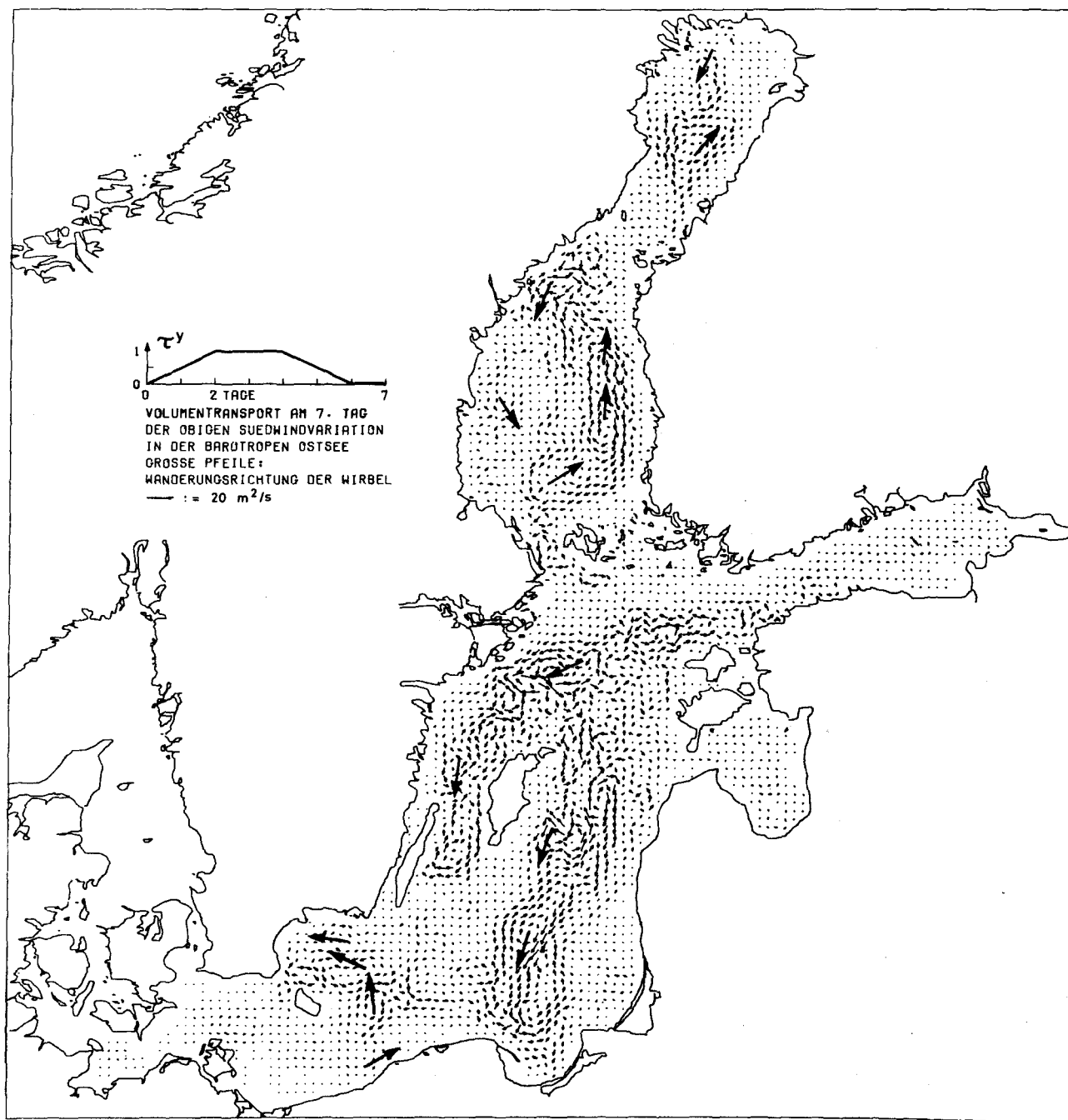


Abb. 2.3-3

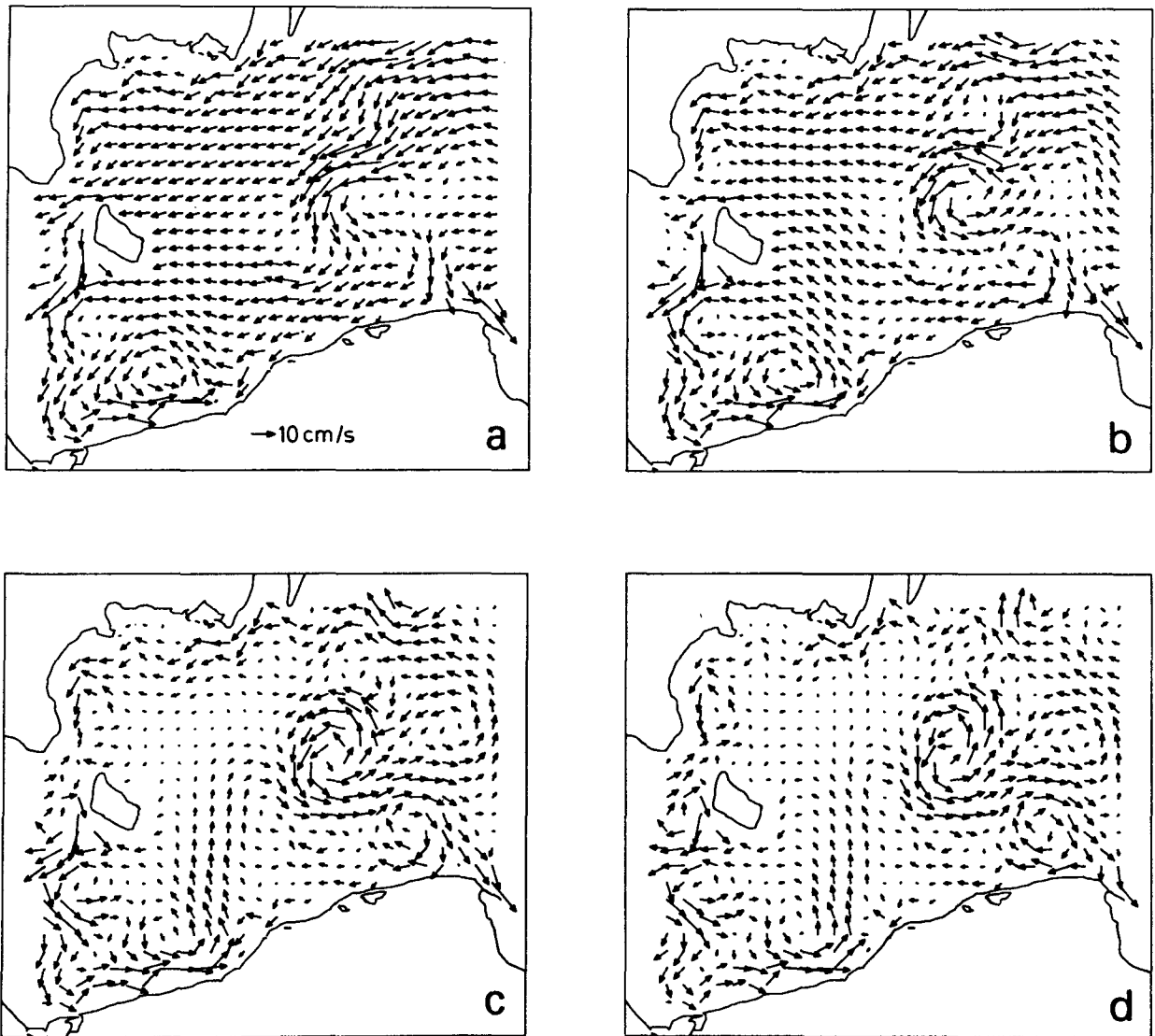


Abb. 2.3-4

Strömung in 0-15m Tiefe des ungeschichteten Bornholmbeckens
bei periodischer Windanregung (Periode=4 Tage, $|\tau^y|=1$ Nord/Süd).

(a) $t=54$ Stunden , (b) $t=60$, (c) $t=66$, (d) $t=72$

Nulldurchgang des Windes zur Zeit (d).

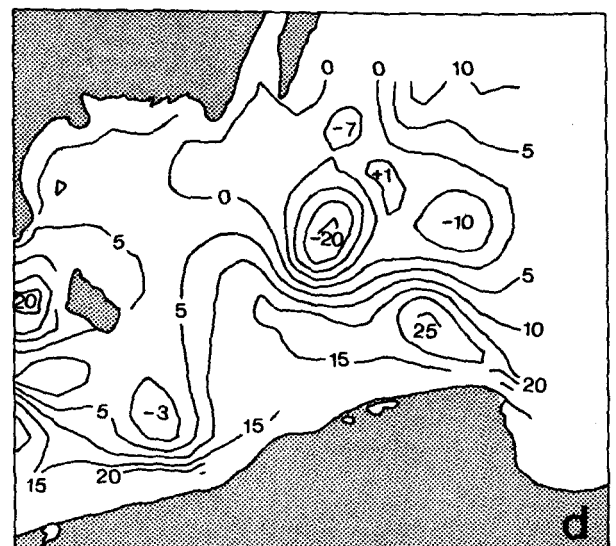
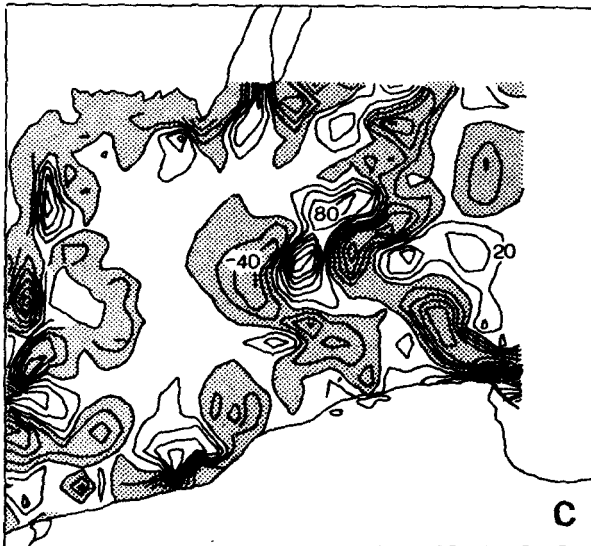
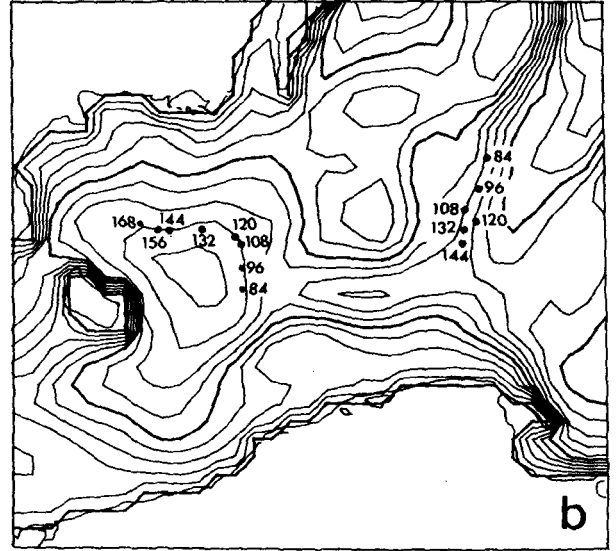
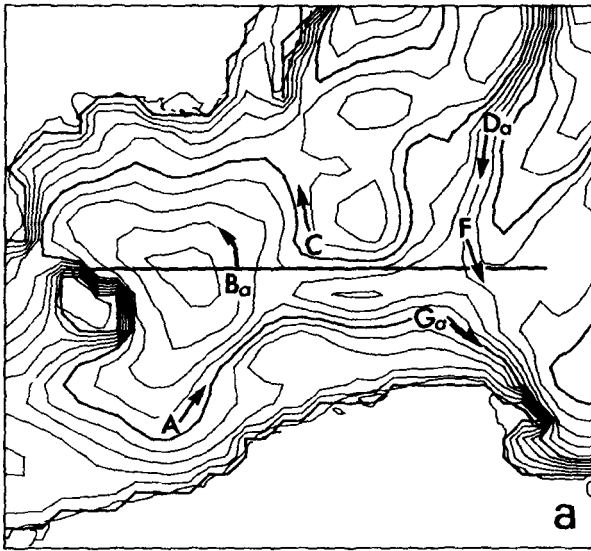


Abb. 2.3-5

- (a) Wirbelzentren A-G auf der Topographie des Bornholmbeckens (zur Zeit $t=72$ Std.) bei periodischer Windanregung. Pfeile geben Wanderungsrichtung der Wirbel bei Windstille an.
- (b) Folge von Positionen der Wirbelzentren B und D (auf der 80m-Linie, Zahlen geben Zeitpunkt in Stunden an)
- (c) Wirbelstärke $\bar{v}_x - \bar{u}_y$ vor Abschaltung des Windes. Einheiten in $10^{-7} s^{-1}$, Isolinienabstand = $20 \cdot 10^{-7} s^{-1}$, schraffiert: antizyklonisch.
- (d) Meeresoberfläche zur Zeit $t=72$ Stunden, passend zu Abb. 2.3-4

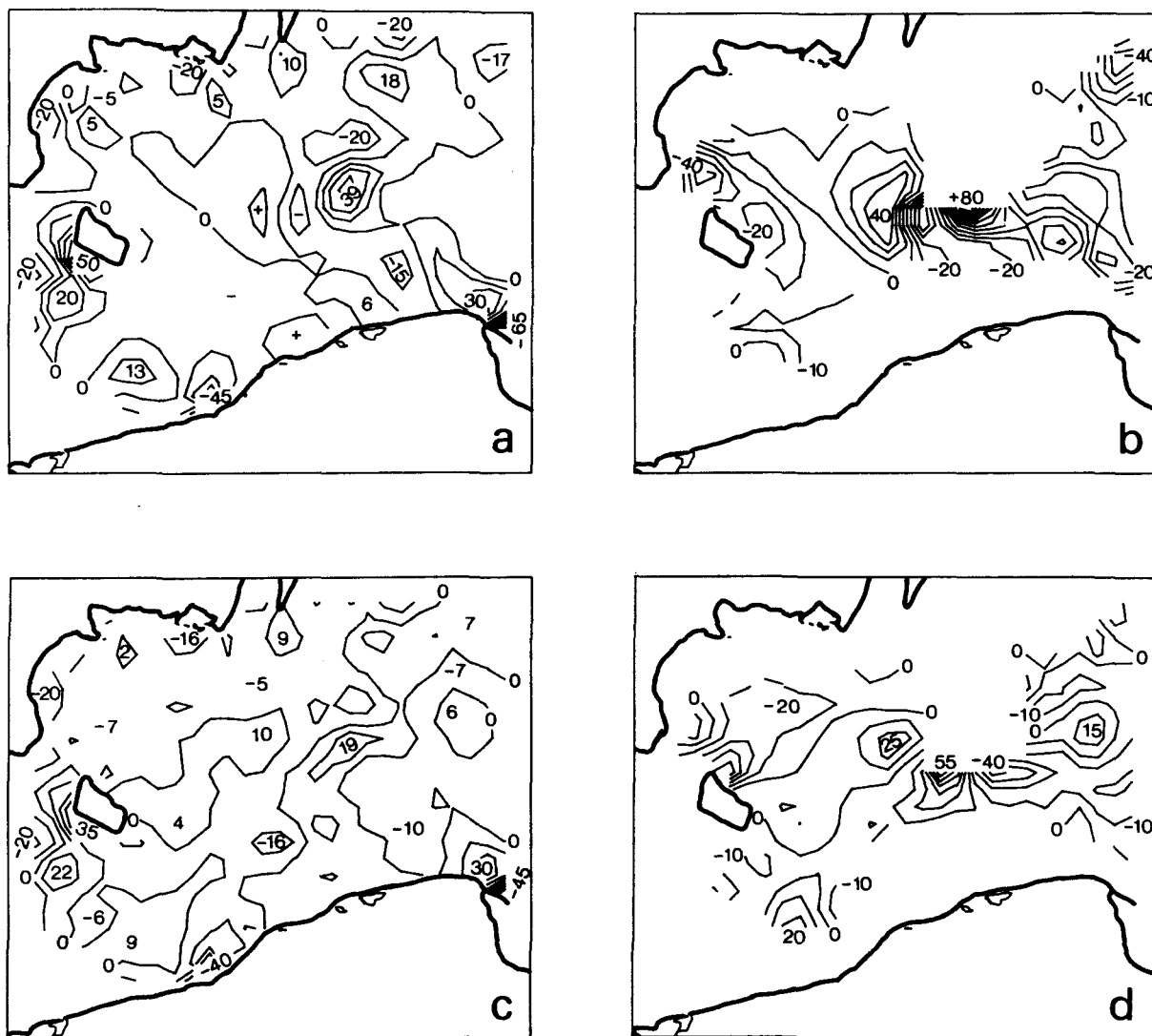


Abb. 2.3-6

Verteilung der Vertikalgeschwindigkeit in der Bornholmsee
bei periodischer Windanregung (zur Zeit $t=72$ Stunden)

(a) barotrop in 15m Tiefe (b) barotrop in 50m Tiefe
(c) baroklin in 15m Tiefe (d) baroklin in 50m Tiefe

Alle Einheiten in 10^{-4} cm/s. Isolinienabstand $=10^{-3}$ cm/s .

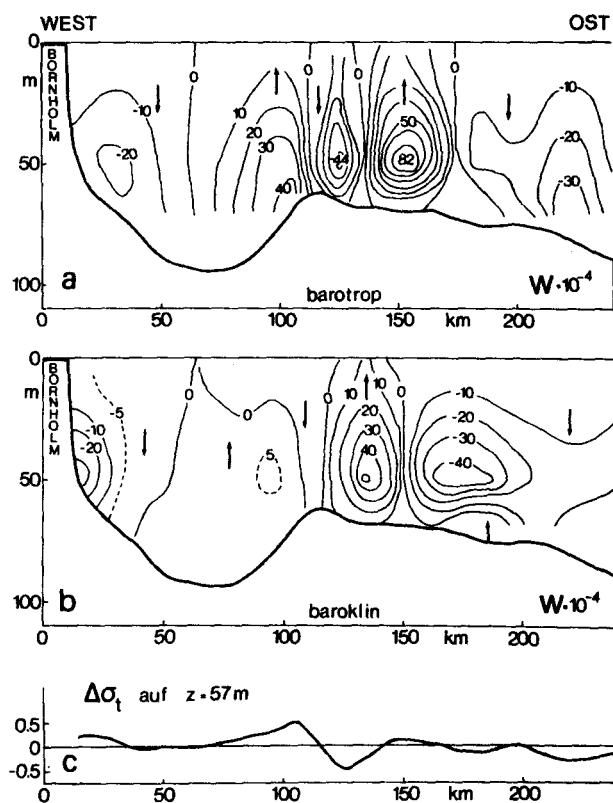


Abb. 2.3-7

(a) und (b):

Vertikalgeschwindigkeit entlang des in Abb. 2.3-5a eingezeichneten Schnitts parallel zur Stolper Rinne.

Zeit: $t=72$ Stunden bei periodischer Windanregung.

(a) barotrop (10^{-4} cm/s) , (b) baroklin (10^{-4} cm/s)

(c) Dichteanomalie in 57m Tiefe für die barokline Rechnung.

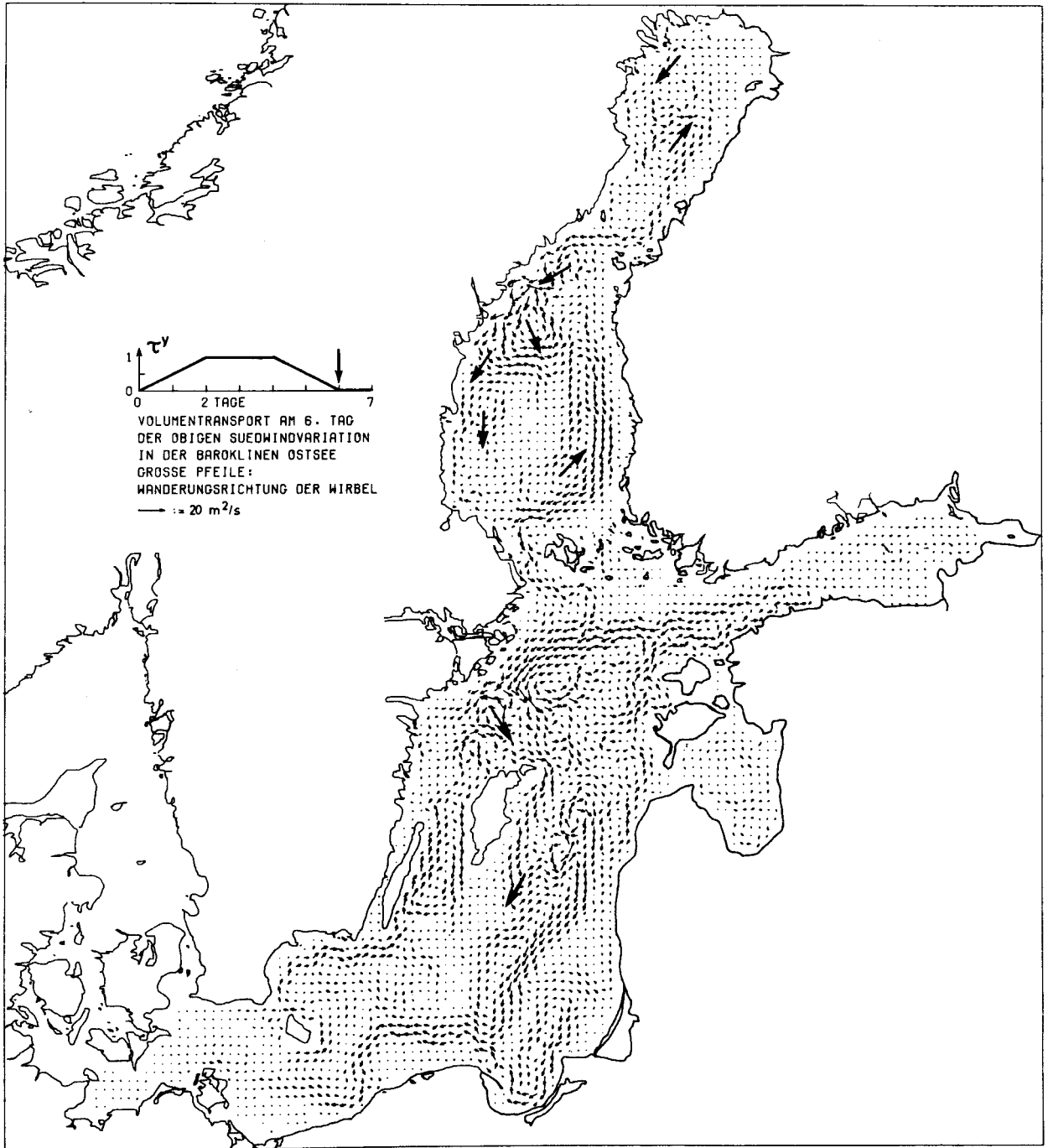


Abb. 2.3-8

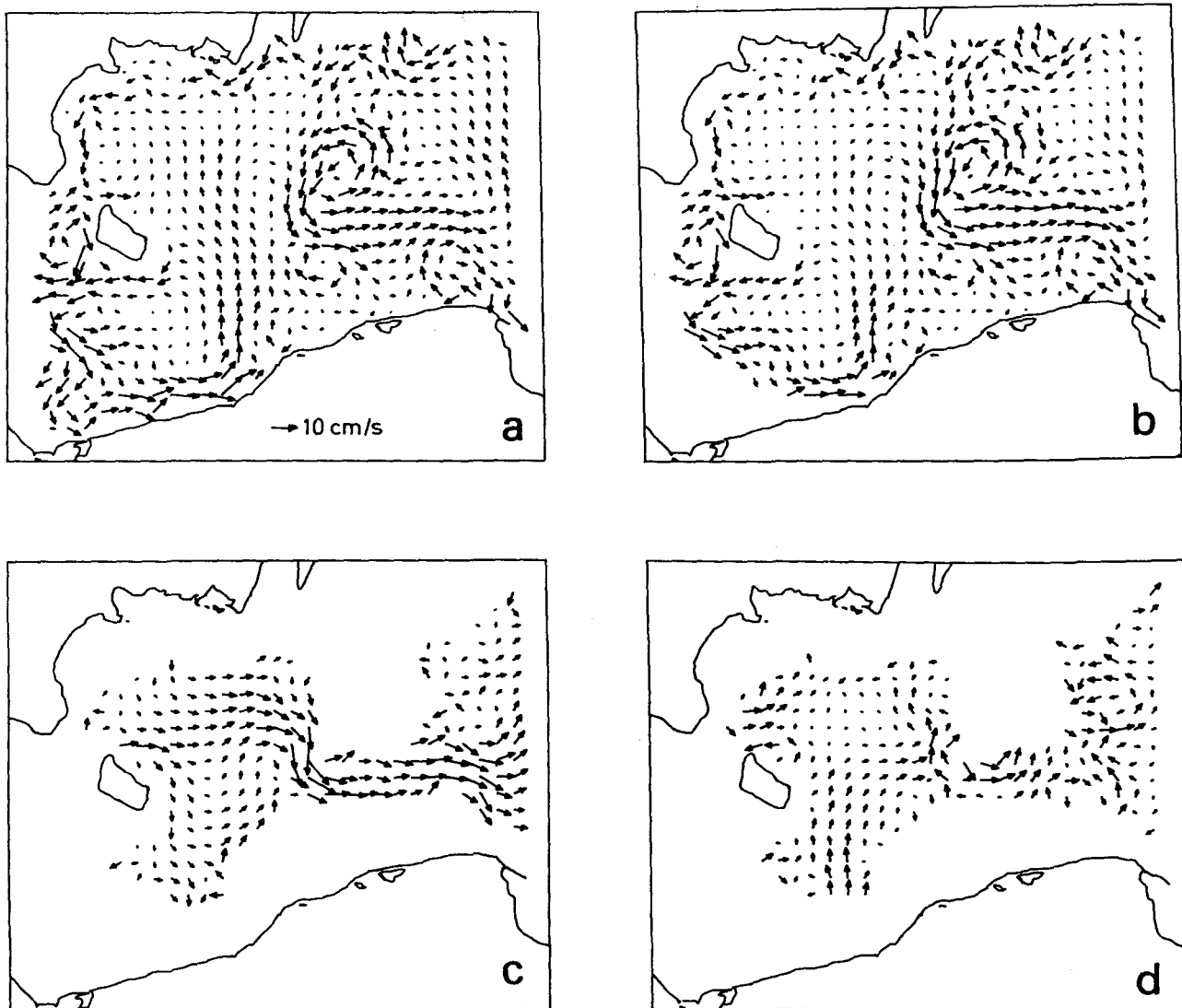


Abb. 2.3-9

Horizontalgeschwindigkeit in der geschichteten Bornholmsee
 bei periodischer Windanregung (Periode 4 Tage, $|\tau|^y = 1$ Nord/Süd,
 Zeit: $t = 72$ Stunden)
 (a) 0-15m (vergl. Abb.2.3-4d), (b) 15-50m, (c) 50-65m
 (d) Differenz zwischen barotroper-barokliner Rechnung in 50-65m .

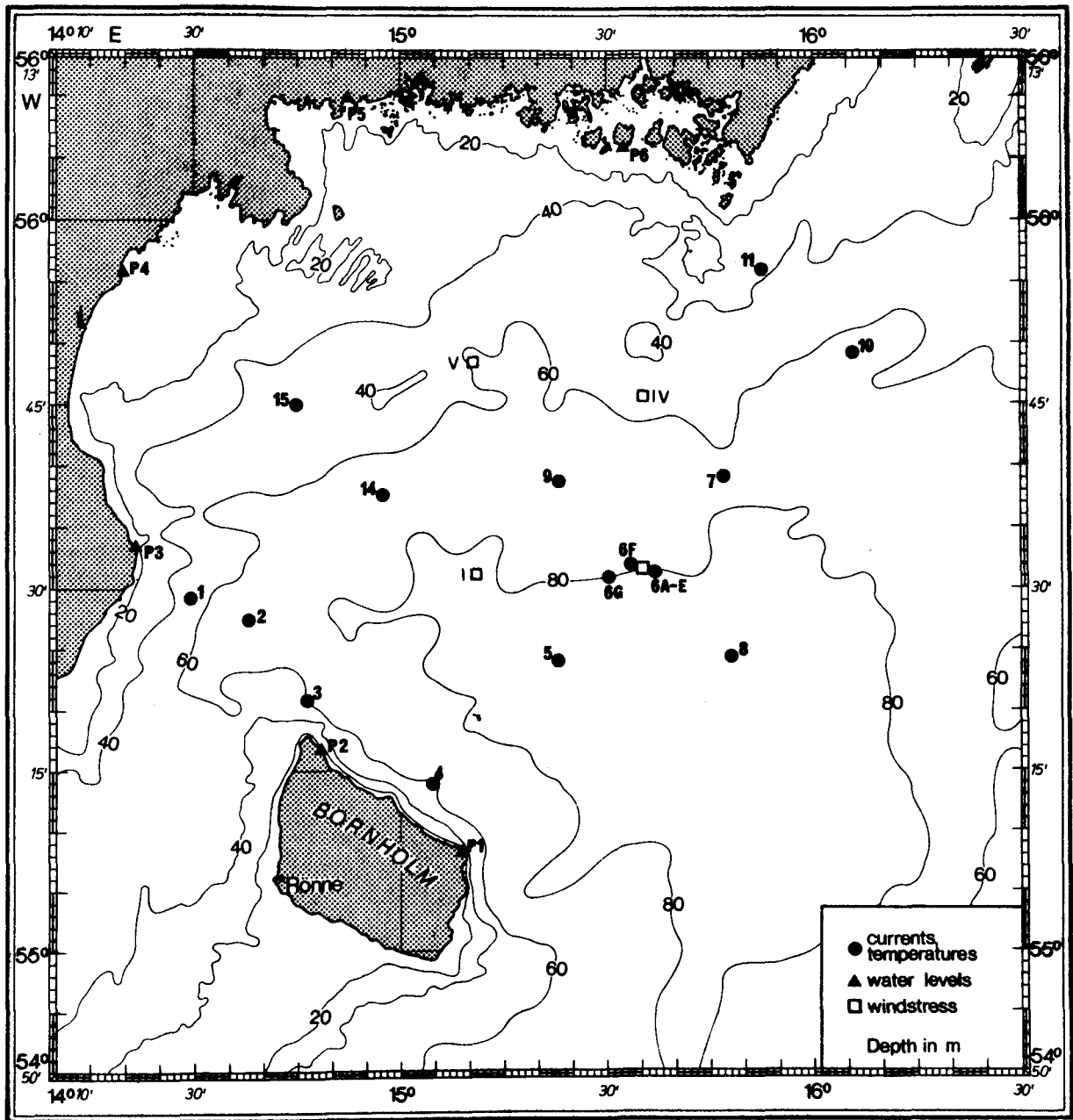


Abb. 3.2-1
Messpositionen des Programms BALTIC'75

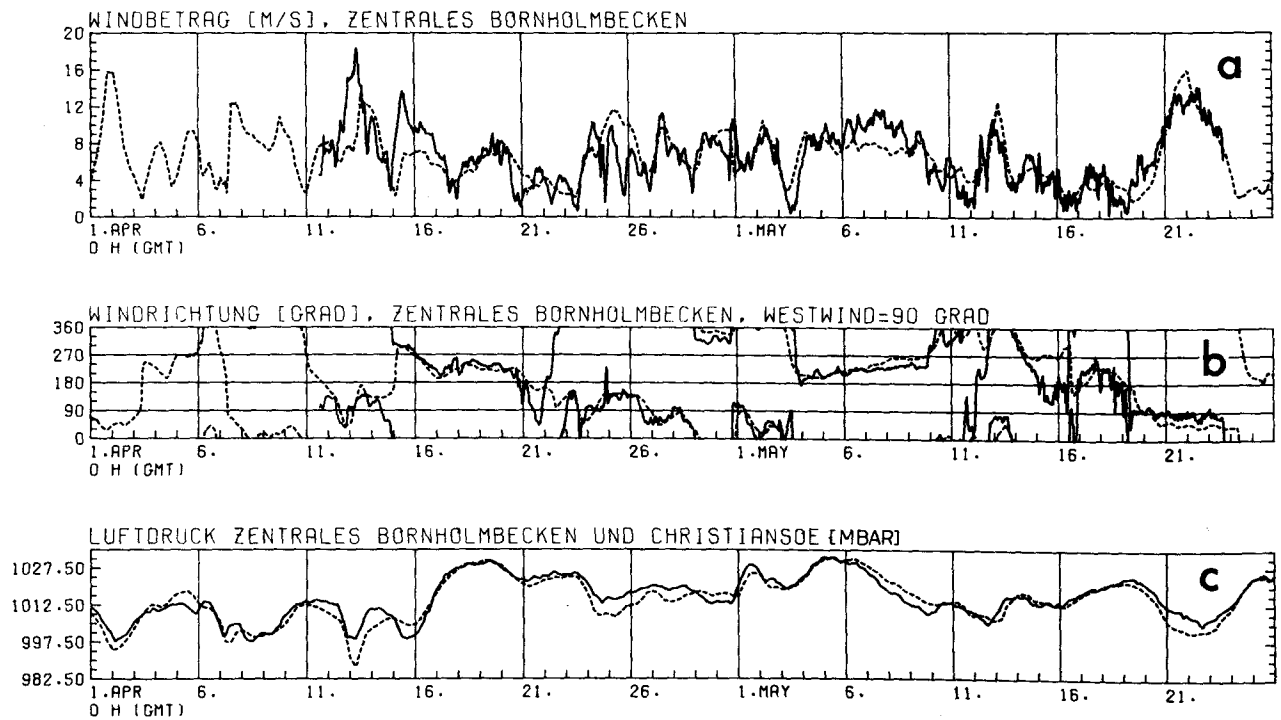
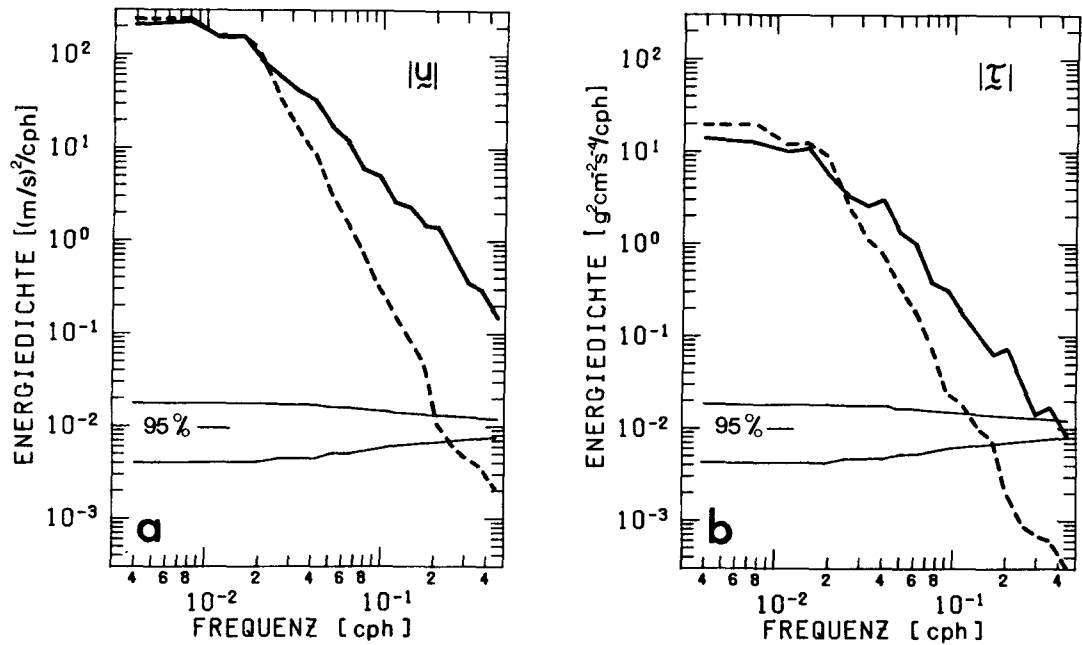
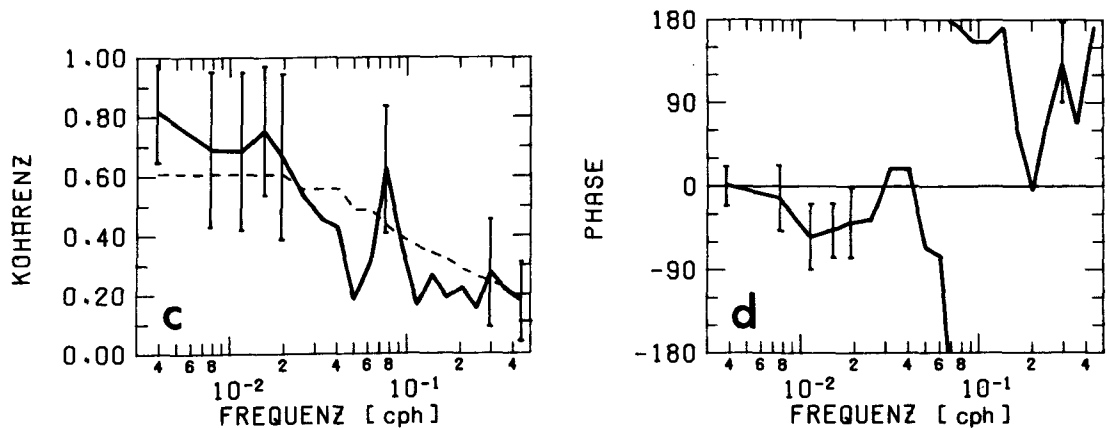


Abb. 3.2-3

- (a),(b): Vergleich von gemessenem (—) und (aus den Bodendruckdaten von Liebing (1976)) geostrophisch berechnetem (-----) Wind im Bornholmbecken.
- (c) : Vergleich von gemessenen (—) und interpolierten Druckdaten (-----) für das Bornholmbecken.



KOHÄRENZ UND PHASE ZWISCHEN GEOSTROPHISCH BERECHNETEM UND "WAHREM" STRESS



PHASE POSITIV: BERECHNETER WIND FUEHRT

Abb. 3.2-4

- (a) Spektren des gemessenen (—) und berechneten (----) Windgeschwindigkeitsbetrages im Bornholmbecken (1975).
- (b) Wie (a), aber statt Geschwindigkeit hier Schubspannung
- (c) Kohärenz zwischen berechneter/gemessener Schubspannung
- (d) Phase zwischen berechneter/gemessener Schubspannung

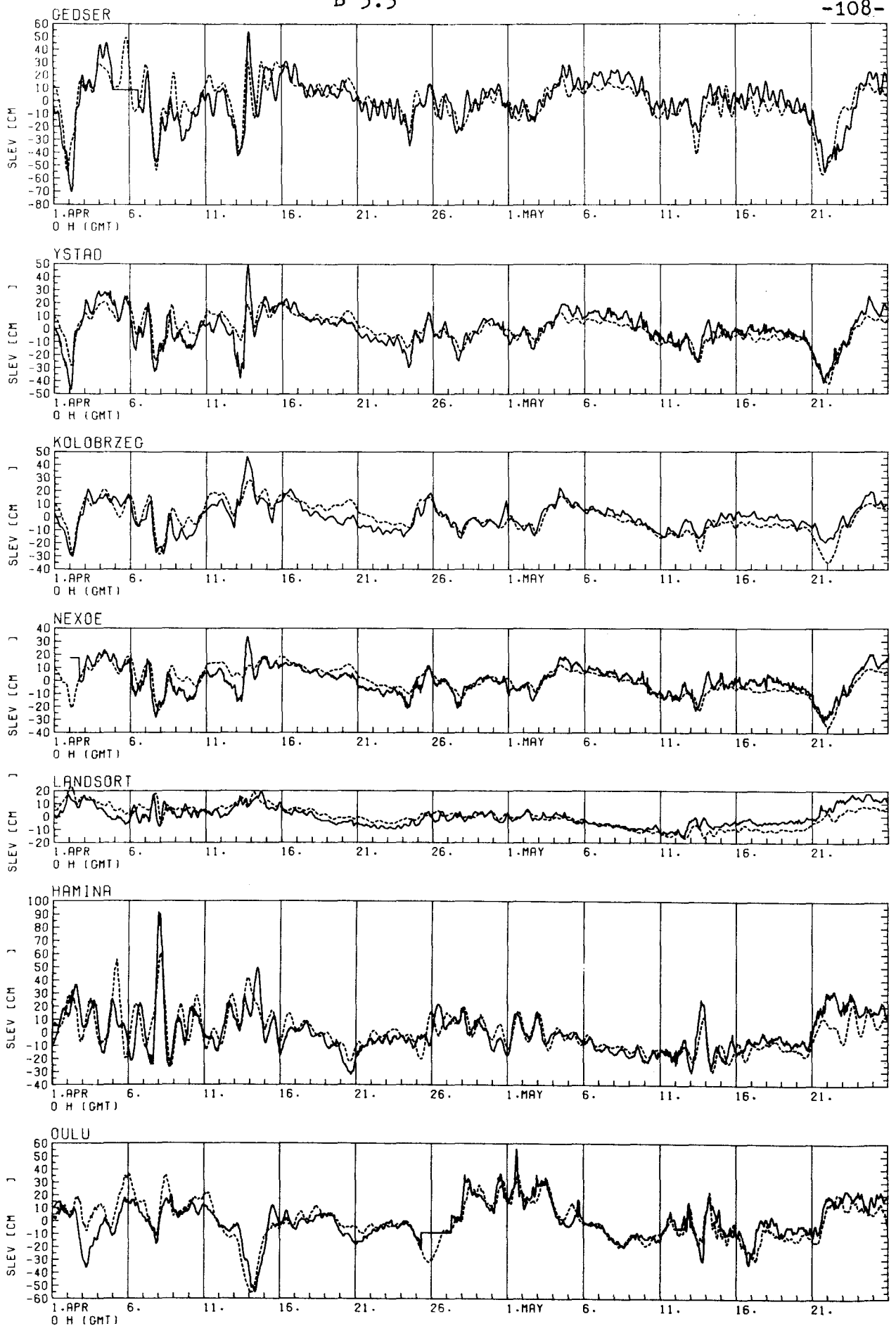


Abb. 3.3-1a

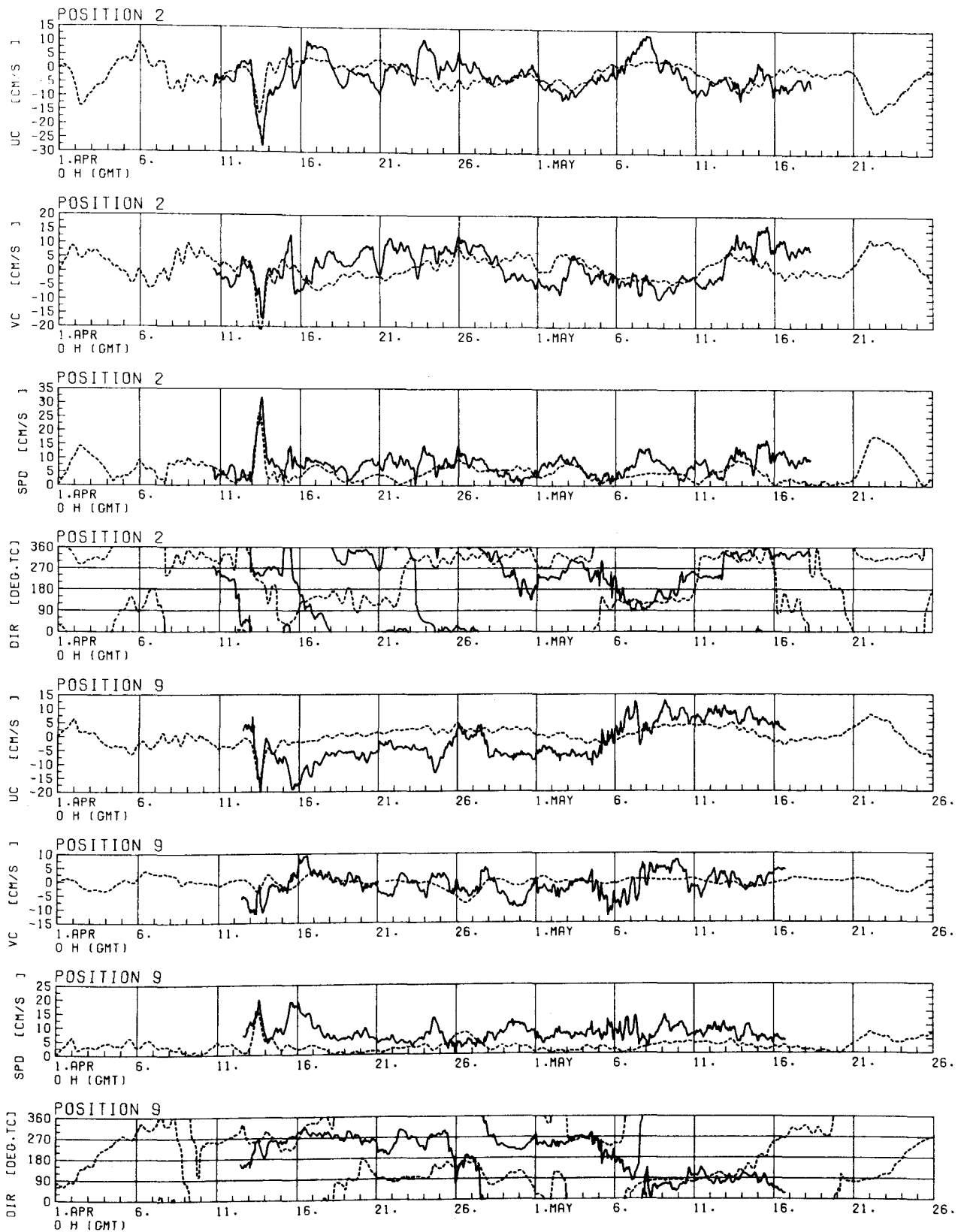
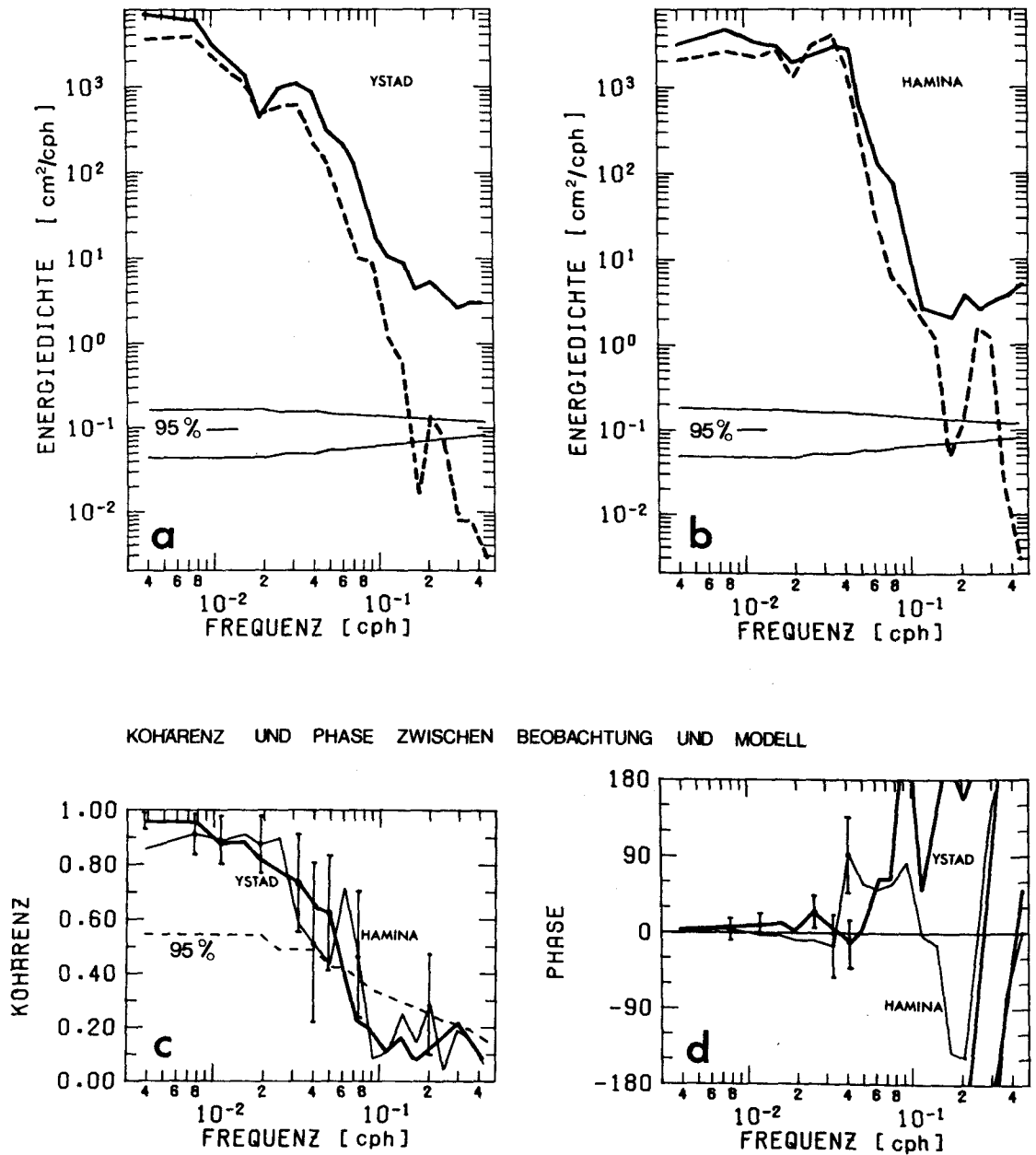


Abb. 3.3-1b

Referenzsimulation mittlerer Strömungen: (—) "gemessen" und (----) berechnet. Von oben nach unten: Pos. 2 (s. Abb. 3.2-1): Ost-, Nordkomponente, Betrag und Richtung der Strömung, dann Pos. 9 dito.



KOHÄRENZ UND PHASE ZWISCHEN BEOBACHTUNG UND MODELL

Abb. 3.3-2

- (a) Spektren des Wasserstandes von YSTAD, gemessen (—), berechnet (—)
- (b) Wie (a), aber für HAMINA
- (c) Kohärenzen zwischen Messung und Modell für die Orte YSTAD (dick) und HAMINA (dünn)
- (d) Phasen zwischen Messung und Modell für YSTAD (dick) und HAMINA (dünn). Phase positiv: Messung führt.

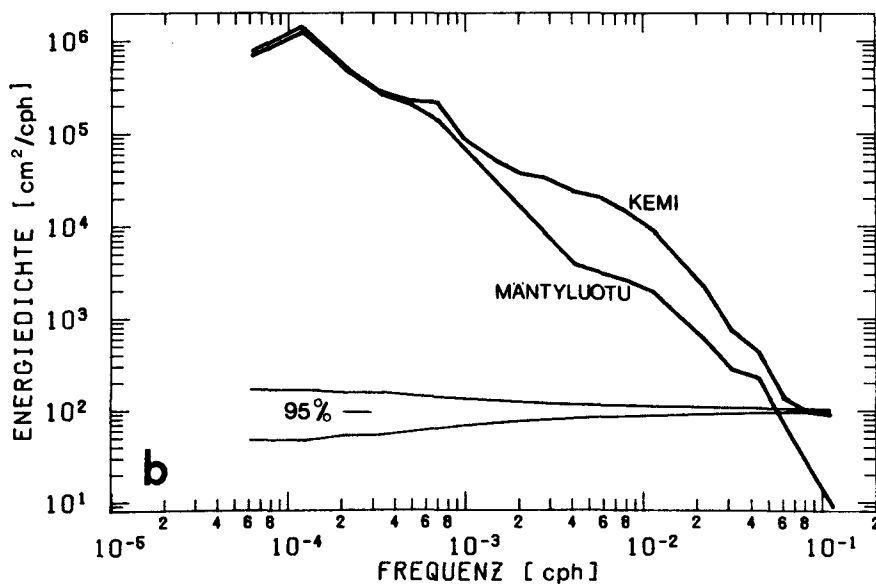
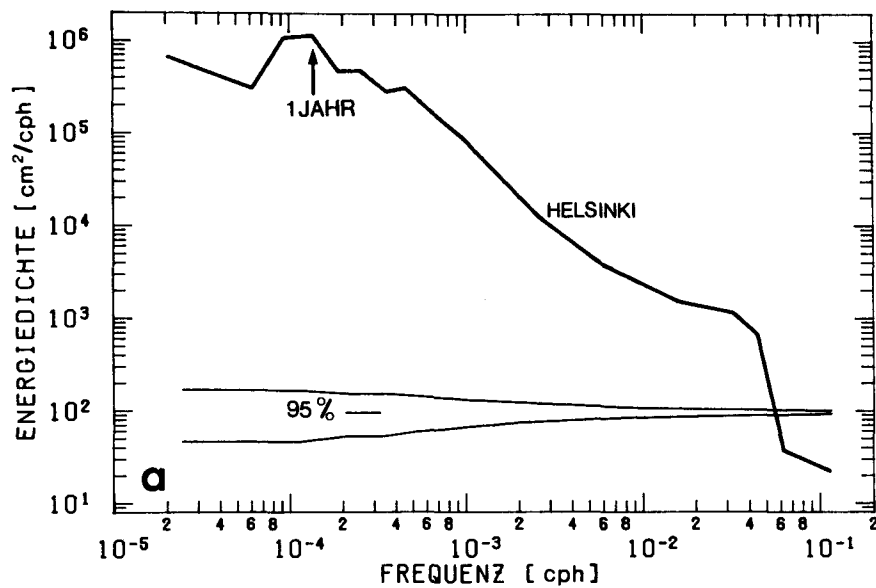


Abb. 3.3-3

(a) Wasserstandsspektrum von HELSINKI (57 Jahre, 1904-1961)

(b) Wasserstandsspektren von KEMI und MÄNTYLUOTU (11 Jahre, 1949-60)

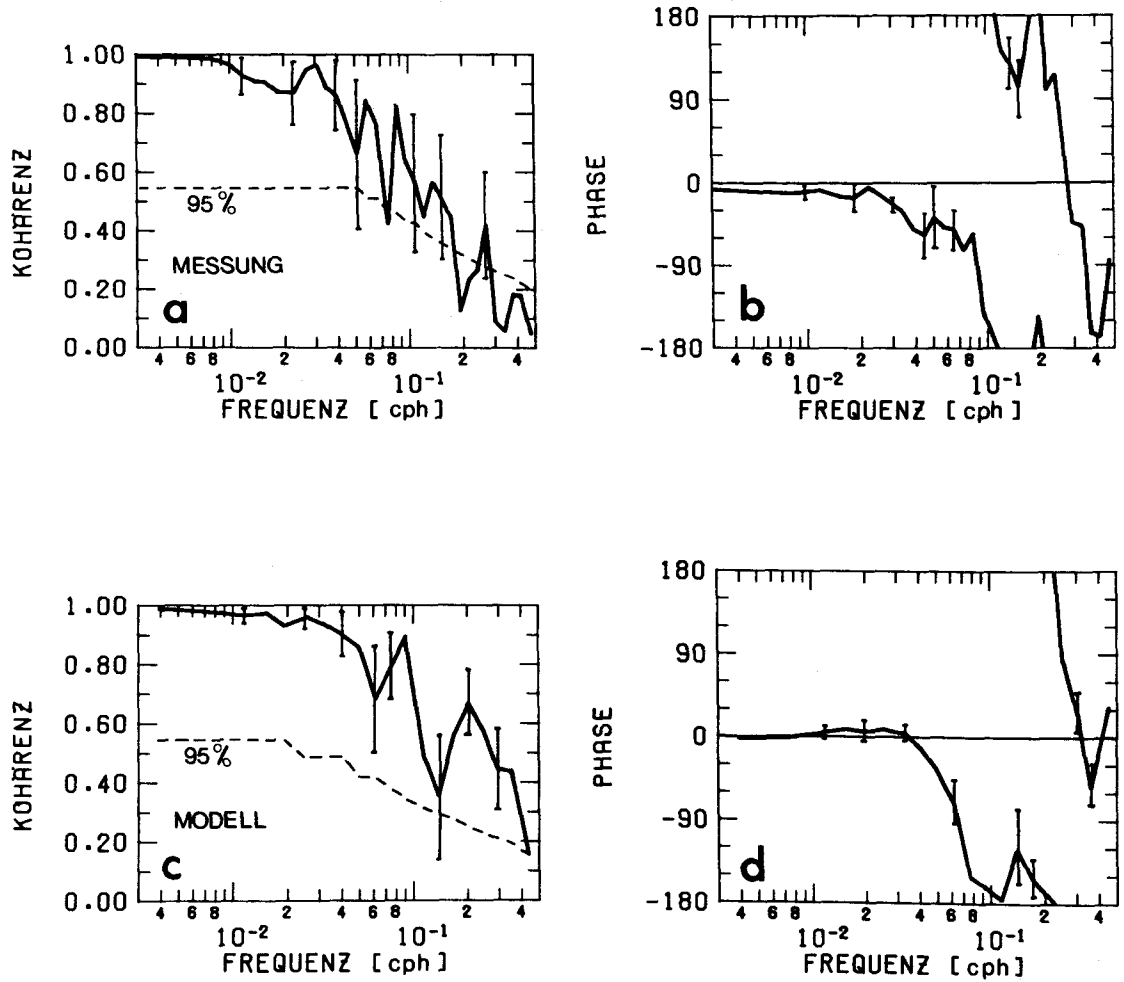
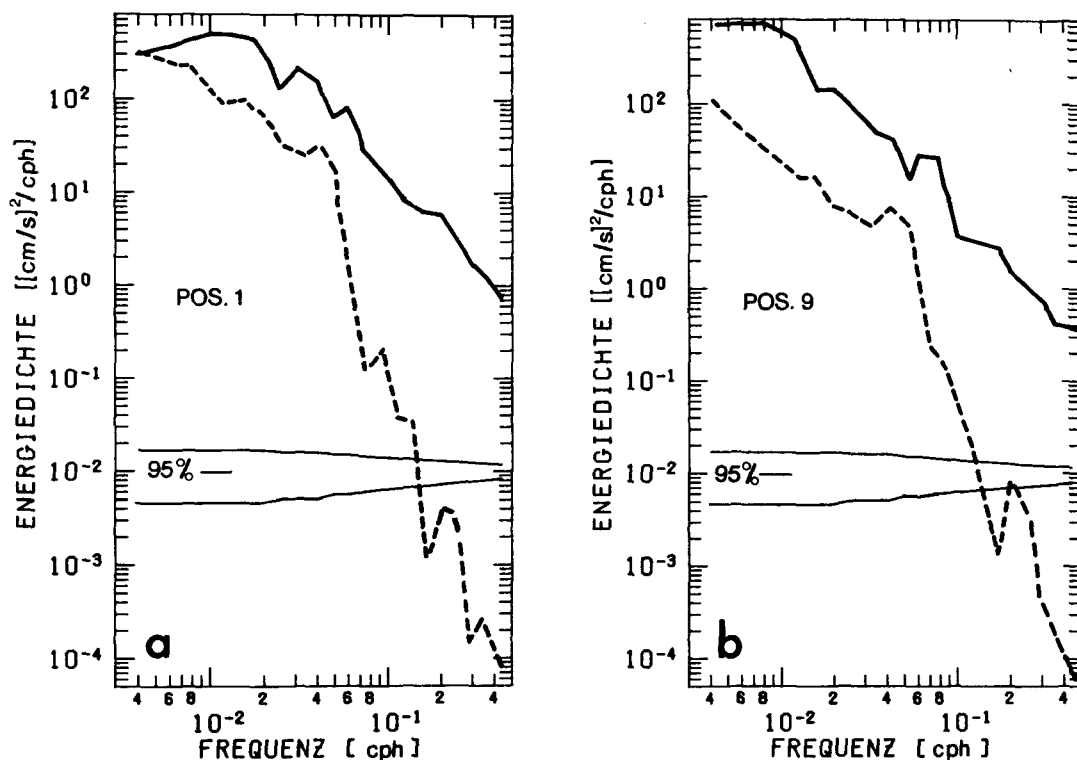


Abb. 3.3-4

- (a) Kohärenz zwischen GEDSER und YSTAD , beobachtet.
- (b) Phase zwischen GEDSER und YSTAD , beobachtet.
- (c) Wie (a), aber vom Modell berechnet. Phase positiv: GEDSER führt.
- (d) Wie (b), aber vom Modell berechnet.



KOHÄRENZEN ZWISCHEN BEOBACHTUNG UND MODELL

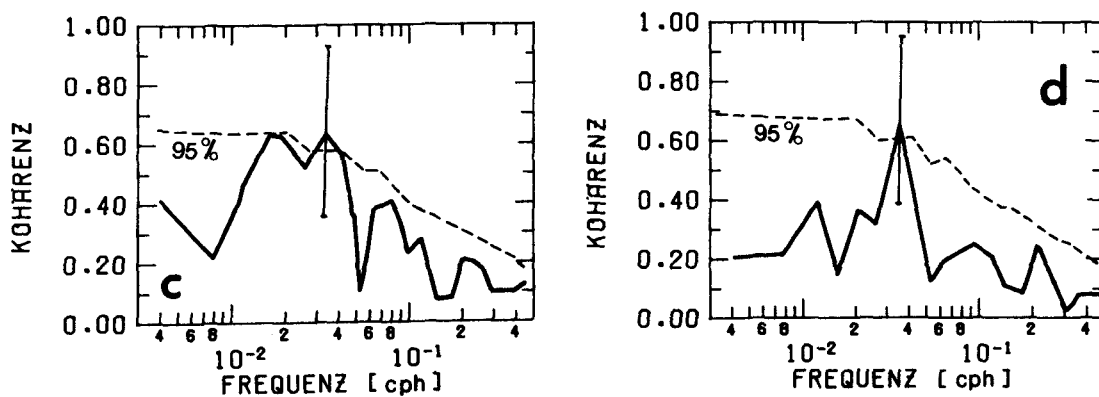


Abb. 3.3-5

- (a),(b): Spektren von "gemessener" (—) und beobachteter (----) mittlerer Strömung für Pos. 1 und 9.
 (c),(d): Kohärenzen zwischen Beobachtung und Modell für Pos.1 und 9.

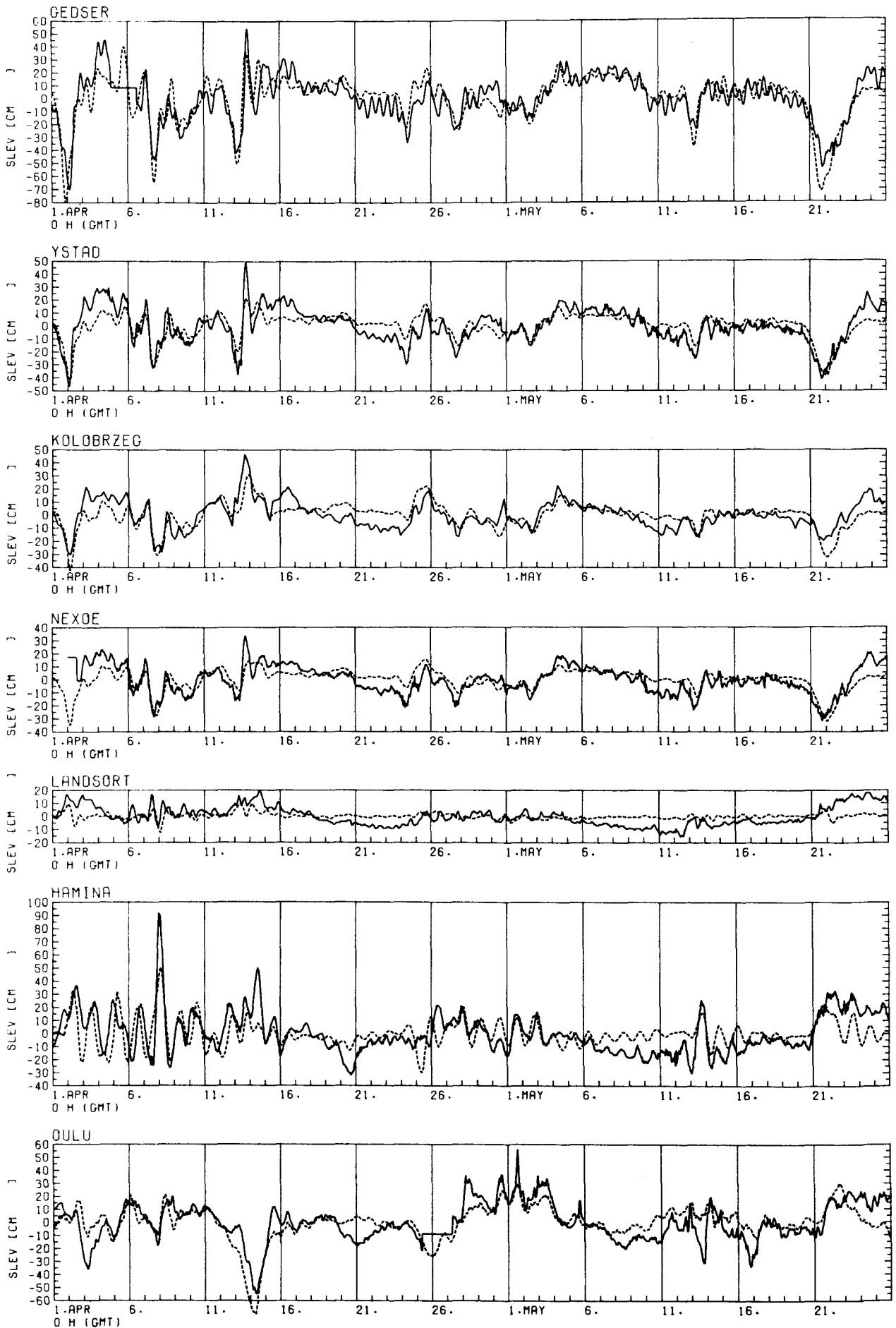


Abb. 3.3-6

Wie Abb. 3.3-1a, hier aber für die geschlossene Ostsee

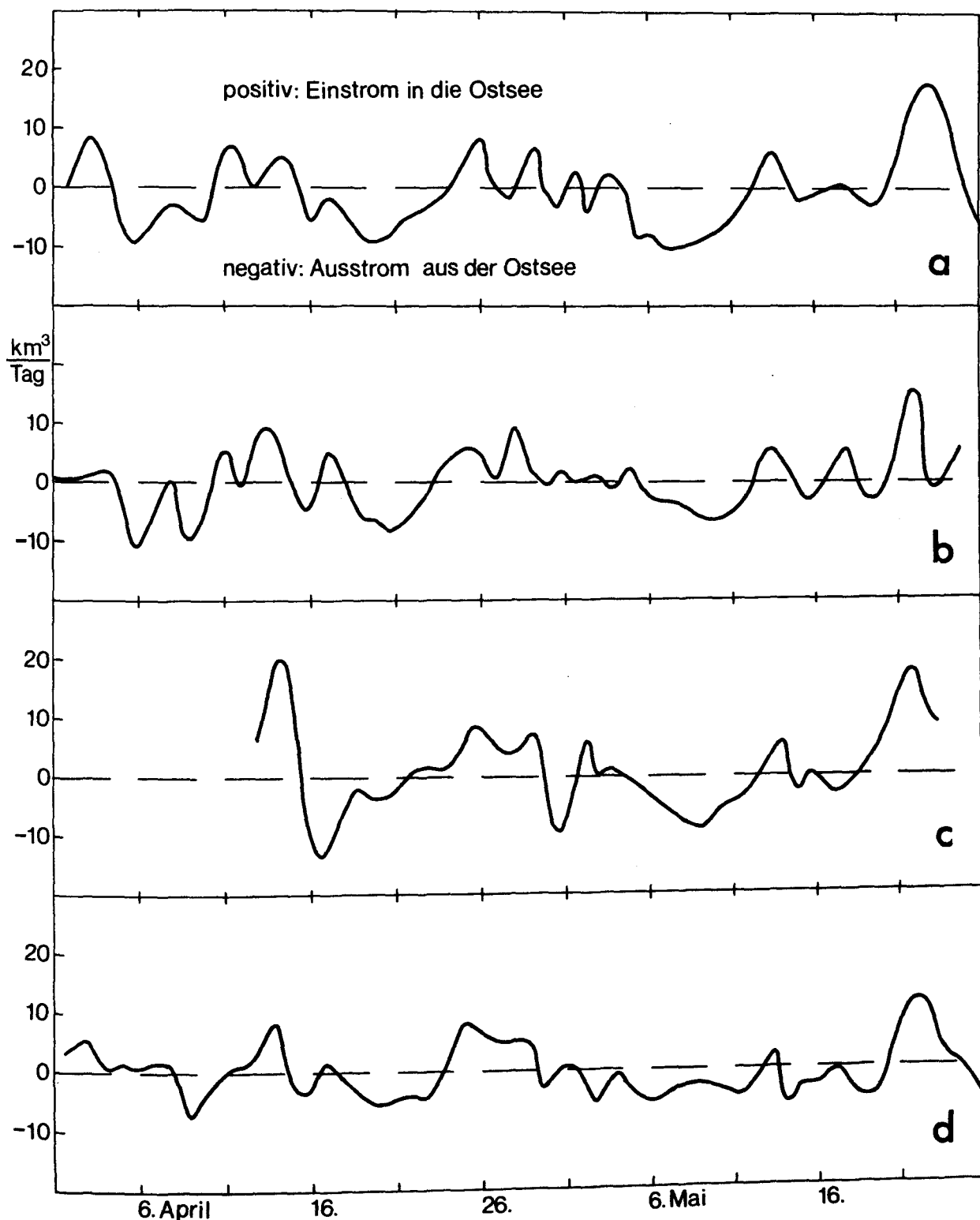


Abb. 3.3-7

- (a) Gemessener Transport durch den Großen Belt (Jacobsen, 1976)
- (b) Vom barotropen Modell berechneter Transport im Fehmarnbelt
- (c) Transport im Fehmarnbelt auf Grund der halb-empirischen Formel aus §1.4.3 .
- (d) Geostrophisch aus Wasserständen berechneter Transport im Fehmarnbelt.

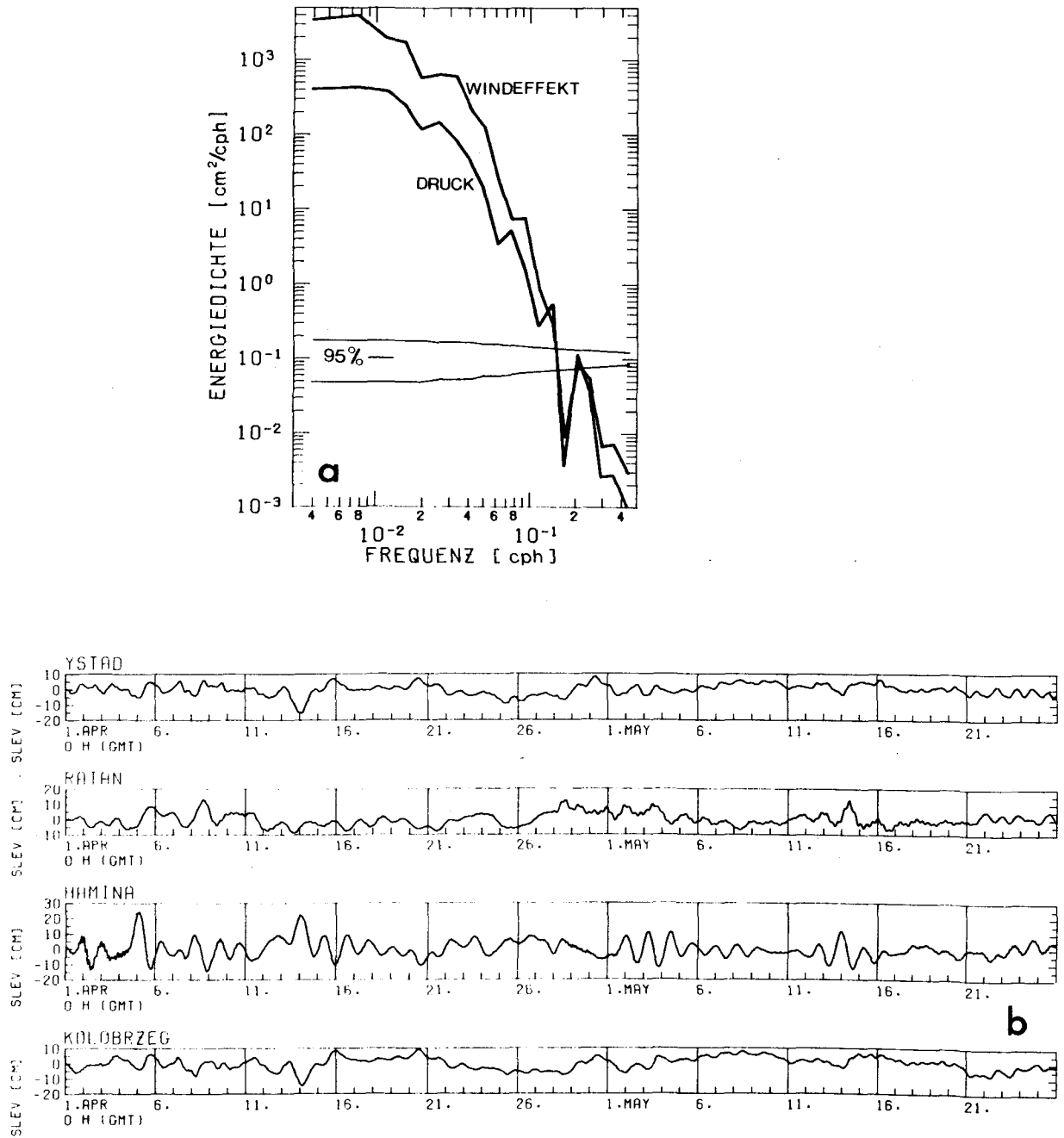


Abb. 3.3-8

- (a) Wasserstandsspektren für YSTAD auf Grund des Windes bzw. des Druckes allein.
- (b) Wasserstandsschwankungen auf Grund des Druckeffekts allein für den BAL TIC '75 Zeitraum.